Circuiti a tempo discreto

Esercitazione n. 2
Circuiti *TD* nel dominio della frequenza

Raffaele Parisi

Dipartimento DIET, Università di Roma “La Sapienza”

Esercizio 1

Calcolare la *DTFT* della sequenza

$$x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-4]$$

Usando la definizione di *DTFT*, si ha

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-4]e^{-j\omega n}$$

A causa del gradino, si può scrivere

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n} - \sum_{n=0}^{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n}$$

Utilizzando le espressioni della somma di una serie e di una successione geometrica, si ottiene

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1 - \left(\frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)^4}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$

■

Esercizio 2

Calcolare la *DTFT* della sequenza

$$x[n] = u[n] - u[n-N]$$

in cui N è un numero intero dato.

Si ha

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u[n] - u[n-N])e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

La trasformata di Fourier a tempo-discreto (*DTFT*)

L'espressione trovata si può scrivere anche nella forma

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}} \cdot \frac{e^{j\frac{N}{2}\omega} - e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega}} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega}$$

In modulo e fase

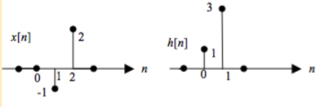
$$\begin{aligned} \left|X(e^{j\omega})\right| &= \left|\frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega}\right| \\ \angle X(e^{j\omega}) &= -\frac{N-1}{2}\omega + \arg\left\{\frac{\frac{N}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\right\} \end{aligned}$$

Si noti la presenza del termine $\arg\left\{\frac{\frac{N}{2}\omega}{\frac{1}{2}\omega}\right\}$ nella fase, dovuto al fatto che $\frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega}$ può essere positivo o negativo.

■

Esercizio 3

Date le sequenze in figura



calcolare la loro convoluzione utilizzando la *DTFT*.

Si ha $X(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega}$ e $H(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega}$ e quindi

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} - e^{-2j\omega} + 6e^{-3j\omega}$$

$$y[n] = -\delta[n-1] - \delta[n-2] + 6\delta[n-3]$$

■

Esercizio 4

Calcolare la *DTFT* inversa della funzione

$$X(e^{j\omega}) = e^{j\omega K}$$

in cui K è un numero intero dato.

La *DTFT* inversa naturalmente è immediata ed è semplicemente $x[n] = \delta[n+K]$. In generale è possibile calcolare l'antitrasformata ricorrendo alla definizione

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega K}e^{j\omega n}d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(K+n)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{j(K+n)}\cdot e^{j\omega(K+n)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \end{aligned}$$

La *DTFT* inversa

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(K+n)} \cdot \left(e^{j(K+n)\pi} - e^{-j(K+n)\pi} \right) = \\
&= \frac{\mathrm{sen}[(K+n)\pi]}{(K+n)\pi}
\end{aligned}
$$

La funzione $\frac{\mathrm{sen}\, m\pi}{m\pi}$ è sempre nulla per $m \neq 0$, mentre vale 1 per $m = 0$. Quindi

$$
x[n] = \frac{\mathrm{sen}[(K+n)\pi]}{(K+n)\pi} = \begin{cases} 1 & \text{per } n = -K \\ 0 & \text{per } n \neq -K \end{cases}
$$

cioè $x[n] = \delta[n+K]$.

■

Esercizio 5

Calcolare la *risposta in frequenza* del circuito caratterizzato dall'equazione

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

Calcolando la *DTFT* di entrambi i membri di questa equazione si ottiene

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + X(e^{j\omega})e^{-2j\omega} + \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

e quindi

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

■

Esercizio 6

Calcolare la *risposta permanente* del circuito avente risposta in frequenza $H(e^{j\omega}) = \frac{1-e^{-2j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-4j\omega}}$ in presenza dell'ingresso $x[n] = \text{sen}(\frac{\pi}{4}n)$.

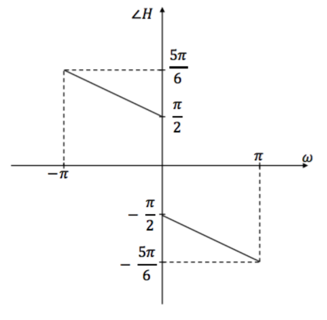
La *risposta permanente* $y[n]$ si calcola utilizzando la risposta in frequenza alla pulsazione $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ dell'ingresso

$$
\begin{aligned}
y[n] &= |H(e^{j\frac{\pi}{4}})|\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}n + \angle H(e^{j\frac{\pi}{4}})) = \\
&= \left|\frac{1-e^{-2j\frac{\pi}{4}}}{1+\frac{1}{2}e^{-4j\frac{\pi}{4}}}\right|\text{sen}(\frac{\pi}{4}n + \angle\frac{1-e^{-2j\frac{\pi}{4}}}{1+\frac{1}{2}e^{-4j\frac{\pi}{4}}}) = \\
&= 2|1+j|\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}n + \angle(1+j)) = \\
&= 2\sqrt{2}\,\text{sen}(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4})
\end{aligned}
$$

■

Esercizio 7

Si consideri un circuito con risposta in ampiezza $|H(e^{j\omega})| = 1$ (*passatutto*) e risposta in fase $\angle H(e^{j\omega})$ come nella figura



Si calcoli l'uscita permanente corrispondente all'ingresso $x[n] = \cos(\frac{3}{2}\pi n + \frac{\pi}{4})$.

La risposta permanente

Si ha

$$y[n] = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n + \frac{\pi}{4} + \angle H(e^{j\frac{3}{2}\pi})\right)$$

Poichè per la periodicità della risposta in frequenza

$$H(e^{j\frac{3}{2}\pi}) = H(e^{j\frac{3}{2}\pi - 2\pi}) = H(e^{-j\frac{1}{2}\pi}) = e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

si ha

$$y[n] = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n + \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n + \frac{11}{12}\pi\right)$$

■

La risposta permanente

Esercizio 8

Si consideri un circuito con risposta impulsiva $h[n] = (\frac{j}{2})^n \cdot u[n]$, sottoposto all'ingresso $x[n] = \cos \pi n \cdot u[n]$. Si calcoli la risposta permanente del circuito.

La *DTFT* di $h[n]$ è $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{j}{2}e^{-j\omega}}$. La risposta in frequenza alla pulsazione dell'ingresso $\omega = \pi$ è

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{1 - \frac{j}{2}e^{-j\pi}}$$

Quindi

$$|H(e^{j\pi})| = \left|\frac{1}{1 - \frac{j}{2}e^{-j\pi}}\right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \angle H(e^{j\pi}) = \angle\frac{1}{1 - \frac{j}{2}e^{-j\pi}} = -\arctan(\frac{1}{2})$$

La risposta permanente

La risposta permanente è dunque

$$\begin{aligned} y[n] &= |H(e^{j\pi})| \cos\left(\pi n + \angle H(e^{j\pi})\right) \cdot u[n] = \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos\left(\pi n - \arctan(\frac{1}{2})\right) \cdot u[n] \end{aligned}$$

■