Circuiti a tempo discreto

Esercitazione n. 4
Funzione di rete e trasformata z

Raffaele Parisi

Dipartimento DIET, Università di Roma "La Sapienza"

Esercizio 1

Dato il circuito descritto dalla relazione ingresso-uscita

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

determinarne la risposta impulsiva $h[n]$.

Bisogna risolvere l'equazione nell'ipotesi $x[n] = \delta[n]$. La trasformata z applicata all'equazione (nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle) produce

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

e quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Risoluzione di equazioni alle differenze

La risposta impulsiva può essere determinata dall'antitrasformata di $H(z)$. Si hanno due possibili soluzioni, dipendenti dalla regione di convergenza (ROC) scelta:

1. Se $h[n]$ è *causale* (ROC: $|z| > \frac{1}{2}$)

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

2. Se $h[n]$ è *anticausale* (ROC: $|z| < \frac{1}{2}$)

$$h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

■

Esercizio 2

In un circuito *TD*, alla sequenza di ingresso

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1]$$

corrisponde l'uscita

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$$

Determinare la funzione di rete $H(z)$, individuare la *ROC*, calcolare la corrispondente risposta impulsiva $h[n]$ e scrivere l'equazione alle differenze che descrive il circuito.

La trasformata z dell'ingresso è

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{-\frac{3}{2}z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$$

con *ROC* data da $\frac{1}{2} < |z| < 2$, in quanto una parte di $x[n]$ è causale e una parte è anticausale.
La trasformata z dell'uscita è

$$Y(z) = \frac{6}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{-\frac{3}{2}z}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{3}{4})}$$

con *ROC* data da $|z| > \frac{3}{4}$ (tutta la sequenza di uscita è causale).
Si ottiene

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z - 2}{z - \frac{3}{4}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}$$

con *ROC* $|z| > \frac{3}{4}$, in quanto la *ROC* di $Y(z)$ deve avere una intersezione non nulla con le *ROC* di $X(z)$ e $H(z)$. Il circuito dunque è causale. Si noti la cancellazione del polo dell'ingresso in $z = 2$ con lo zero corrispondente della funzione di rete.

L'antitrasformata della funzione di rete si può calcolare notando che $H(z)$ si può scrivere nella forma

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

Utilizzando la proprietà dell'operatore di ritardo z^{-1}, la risposta impulsiva risulta

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Dall'espressione di $H(z)$ si ottiene infine

$$Y(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \cdot X(z)$$

da cui si ricava

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + \frac{3}{4}y[n-1]$$

■

Esercizio 3

Un circuito *TD* è rappresentato dall'equazione

$$y[n] = x[n-1] + \frac{3}{2}y[n-1] + y[n-2]$$

con condizioni iniziali nulle. Determinare la funzione di rete $H(z)$, tracciare il diagramma dei suoi poli e dei suoi zeri, individuare le possibili *ROC*, esaminare stabilità e causalità del circuito e calcolare le possibili risposte impulsive $h[n]$.

La trasformata z applicata all'equazione fornisce

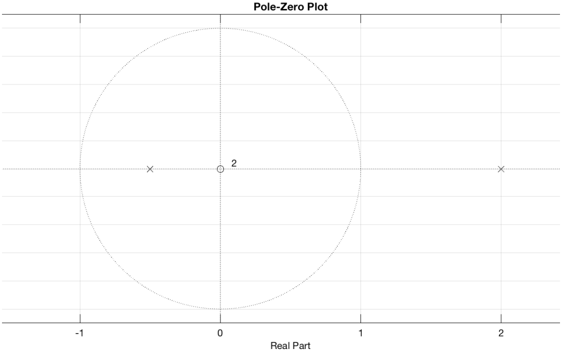
$$Y(z) = z^{-1}X(z) + \frac{3}{2}z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z)$$

e quindi si ricava

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{(z-2)(z+\frac{1}{2})}$$

Analisi di circuiti *TD*

Il grafico mostra i poli $p_1 = -\frac{1}{2}$ e $p_2 = 2$ e lo zero $z_1 = 0$ del circuito.



Le possibili *ROC* con le conseguenti proprietà del circuito sono

1. $|z| < \frac{1}{2} \rightarrow$ circuito *non stabile* e *non causale* (*anticausale*);
2. $\frac{1}{2} < |z| < 2 \rightarrow$ circuito *stabile* e *non causale*;
3. $|z| > 2 \rightarrow$ circuito *non stabile* e *causale*.

Per calcolare la risposta impulsiva bisogna innanzitutto fare lo sviluppo in frazioni parziali di $H(z)$. Si ha

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z+\frac{1}{2})} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+\frac{1}{2}}$$

in cui risultano

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z\to 2} \frac{H(z)}{z} \cdot (z-2) = \frac{2}{5} \\ B &= \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{H(z)}{z} \cdot (z+\frac{1}{2}) = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Le corrispondenti risposte impulsive sono quindi

1. $h[n] = -\frac{2}{5} \cdot 2^n u[-n-1] + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$;
2. $h[n] = -\frac{2}{5} \cdot 2^n u[-n-1] - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$;
3. $h[n] = \frac{2}{5} \cdot 2^n u[n] - \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

■

Esercizio 4

Un circuito *TD causale* ha funzione di rete

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

Si indichi la regione di convergenza di $H(z)$, si dica se il circuito è stabile e si calcolino la risposta impulsiva e la sequenza di ingresso $x[n]$ che produce l'uscita

$$y[n] = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} \cdot 2^n u[-n-1]$$

I poli di $H(z)$ sono $z_1 = \frac{1}{2}$ e $z_2 = -\frac{1}{4}$. Poiché il circuito è causale, la *ROC* è data da $|z| > \frac{1}{2}$, che include la circonferenza di raggio uno. Il circuito quindi è anche stabile.

Il calcolo della risposta impulsiva richiede lo sviluppo in frazioni parziali di $H(z)/z$. Poiché

$$H(z) = \frac{z(z+1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

si ha

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z+1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z+\frac{1}{4}}$$

dove

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{H(z)}{z}\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right) = 2 \\ B &= \lim_{z\to-\frac{1}{4}} \frac{H(z)}{z}\cdot\left(z+\frac{1}{4}\right) = -1 \end{aligned}$$

Quindi risulta

$$h[n] = \left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

Nel dominio di z l'uscita è

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{3}z}{z+\frac{1}{4}} + \frac{\frac{4}{3}z}{z-2} = \frac{z(z+1)}{\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z-2\right)}$$

e l'ingresso è quindi

$$X(z) = \frac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$$

con *ROC* data da $|z| < 2$ (si veda l'uscita). Si noti nell'uscita l'assenza del polo di $H(z)$ in $z = \frac{1}{2}$, cancellato dallo zero di $X(z)$. Il calcolo dello sviluppo in frazioni parziali di $X(z)$ produce

$$X(z) = \frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{4}z}{z-2}$$

La sequenza di ingresso risulta dunque

$$x[n] = \frac{1}{4}\delta[n] - \frac{3}{4} \cdot 2^n u[-n-1]$$

Si noti che l'antitrasformata di $X(z)$ si può calcolare in modo immediato anche dall'espressione

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{1 - 2z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

Si ottiene direttamente

$$x[n] = -2^n u[-n-1] + \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} u[-n]$$

Si può verificare che questa espressione coincide con la precedente.
■

Esercizio 5

Un circuito *TD causale* ha funzione di rete

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

Si calcolino la risposta impulsiva del circuito e la *risposta permanente* all'ingresso $x[n] = e^{j\frac{\pi}{2}n}$.

Per calcolare la risposta impulsiva bisogna calcolare lo sviluppo in frazioni parziali di $\frac{H(z)}{z}$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 + 2z + 1}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - 1\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{\left(z + \frac{1}{2}\right)} + \frac{C}{\left(z - 1\right)}$$

Si ottengono $A = -2, B = \frac{1}{3}$ e $C = \frac{8}{3}$.

Tenendo conto della causalità del circuito, la risposta impulsiva risulta

$$h[n] = -2\delta[n] + \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + \frac{8}{3}u[n]$$

L'ingresso considerato è una *autosequenza* del circuito. L'uscita corrispondente si calcola dalla formula $y[n] = H(e^{j\frac{\pi}{2}})x[n]$

$$\begin{aligned} y[n] &= \left.\frac{z^2+2z+1}{\Big(z+\frac{1}{2}\Big)\Big(z-1\Big)}\right|_{z=e^{j\frac{\pi}{2}}} \cdot x[n] = \\ &= \frac{e^{j\pi}+2e^{j\frac{\pi}{2}}+1}{\Big(e^{j\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\Big)\Big(e^{j\frac{\pi}{2}}-1\Big)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} = \\ &= \frac{2j}{\Big(j+\frac{1}{2}\Big)\Big(j-1\Big)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} = -\frac{4j}{3+j} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{4j(3-j)}{10} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} = -\frac{2}{5}(1+3j) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} = \\
&= -\frac{2\sqrt{10}}{5} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2}n + \arctan(3)\right)}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Esercizio 6

Si consideri la funzione di rete

$$H(z) = \frac{(1 + 0,2z^{-1})(1 - 9z^{-2})}{1 + 0,81z^{-2}}$$

Si determinino la componente *a fase minima* e la componente *passatutto* di $H(z)$.

Questo circuito ha gli zeri $z_1 = -0,2$, $z_2 = 3$, $z_3 = -3$ e i poli $p_1 = 0,9j$ e $p_2 = p_1^* = -0,9j$. Si tratta di un circuito stabile e causale (i poli sono interni al cerchio unitario), ma non a fase minima, in quanto gli zeri z_2 e z_3 sono esterni al cerchio unitario. Si ricorda che una generica componente passatutto (*allpass*) del primo ordine ha l'espressione

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}$$

Decomposizione fase minima - passatutto

La funzione di rete $H(z)$ si può scrivere nel seguente modo

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{(1+0,2z^{-1})(1-3z^{-1})(1+3z^{-1})}{1+0,81z^{-2}} = \\
&= \frac{1+0,2z^{-1}}{1+0,81z^{-2}} \cdot (-3)(z^{-1}-\frac{1}{3}) \cdot 3(z^{-1}+\frac{1}{3}) = \\
&= \frac{(1+0,2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{1+0,81z^{-2}} \cdot \\
& \quad \cdot(-3)\frac{z^{-1}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot 3\frac{z^{-1}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}
\end{aligned}$$

Quindi la funzione a fase minima corrispondente è

$$H_{min}(z) = -9\frac{(1+0,2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}{1+0,81z^{-2}}$$

Decomposizione fase minima - passatutto

mentre la funzione passatutto (del secondo ordine) è

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Si noti che la funzione a fase minima viene alterata anche per un fattore di ampiezza.

■

Esercizio 7

Un circuito ha uno zero di molteplicità 2 in $z = 0$ e due poli nei punti $p_1 = \frac{1}{2}$ e $p_2 = -\frac{1}{3}$. Nell'ipotesi che $H(1) = 6$, si determini la funzione di rete $H(z)$, la risposta impulsiva $h[n]$ e l'uscita $y[n]$ corrispondente all'ingresso $x[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1]$.

Per le condizioni descritte, la funzione di rete ha la forma

$$H(z) = A\frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})}$$

Il termine di guadagno A può essere determinato imponendo la condizione $H(1) = 6$. Si ha

$$\frac{3}{2}A = 6 \Rightarrow A = 4$$

Esempio di sintesi

Il calcolo della risposta impulsiva richiede lo sviluppo in frazioni parziali di $H(z)/z$. Si ha

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})} = \frac{B}{z-\frac{1}{2}} + \frac{C}{z+\frac{1}{3}}$$

I residui valgono $B = \frac{12}{5}$ e $C = \frac{8}{5}$. Nell'ipotesi di circuito *causale*, la risposta impulsiva vale dunque

$$h[n] = \frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

L'ingresso $x[n]$ ha la seguente trasformata z

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} \cdot z^{-1} = \frac{z-\frac{1}{2}}{z-1}$$

Esempio di sintesi

La trasformata z della sequenza di uscita è quindi

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{4z^2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})} \cdot \frac{z-\frac{1}{2}}{z-1} = \frac{4z^2}{(z+\frac{1}{3})(z-1)}$$

Si calcola lo sviluppo in frazioni parziali

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{4z}{(z+\frac{1}{3})(z-1)} = \frac{D}{z+\frac{1}{3}} + \frac{E}{z-1}$$

Risulta $D = 1$ e $E = 3$. La sequenza di uscita quindi è

$$y[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 3u[n]$$

Il primo termine in $y[n]$ rappresenta la *risposta transitoria* del circuito (l'altro polo di $H(z)$ viene cancellato dallo zero di $X(z)$), mentre il secondo termine è la *risposta permanente*, che ha la stessa forma dell'ingresso.

■