Circuiti a tempo discreto

Esercitazione n. 5
Topologia

Raffaele Parisi

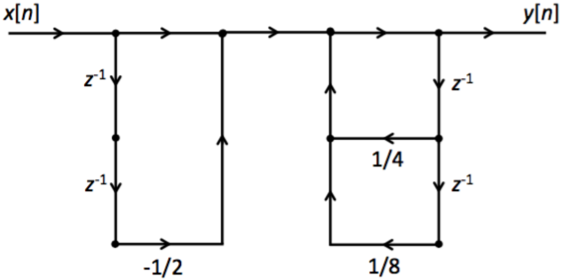
Dipartimento DIET, Università di Roma "La Sapienza"

Esercizio 1

Disegnare la I e la II forma diretta corrispondenti alla funzione di rete

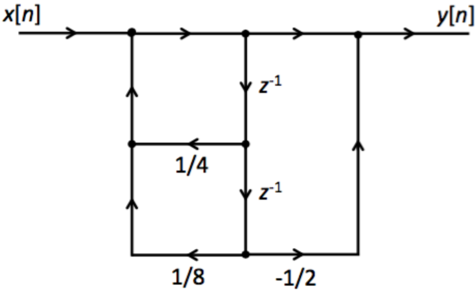
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

La prima forma diretta è semplicemente



Architetture dirette

La seconda forma diretta è



L'unica attenzione riguarda naturalmente il segno dei coefficienti di retroazione della $y[n]$. I coefficienti moltipicativi pari ad 1 non vengono indicati.

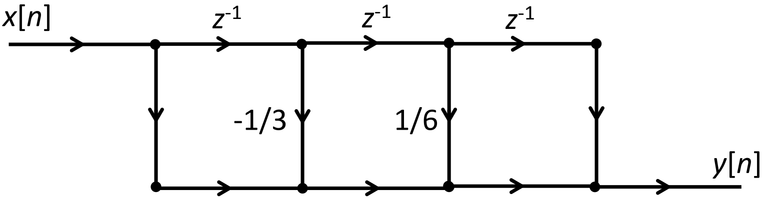
■

Esercizio 2

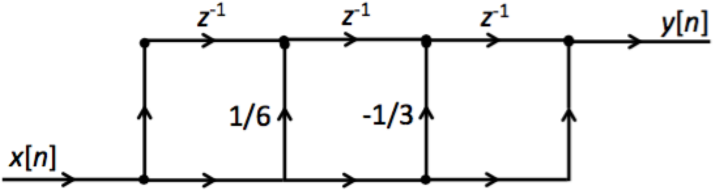
Disegnare la forma diretta e la forma trasposta della funzione di rete

$$H(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} + z^{-3}$$

Si tratta naturalmente di un filtro *FIR*. La forma diretta è



La forma trasposta si ottiene invertendo il verso delle frecce e ribaltando il circuito in modo da avere l'ingresso a sinistra



■

Esercizio 3

Disegnare la forma in parallelo con celle del primo ordine della funzione di rete

$$H(z) = \frac{2 - \frac{8}{3}z^{-1} - 2z^{-2}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

Si deve calcolare lo sviluppo in frazioni parziali della funzione

$$H(z) = \frac{2z^2 - \frac{8}{3}z - 2}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z + \frac{2}{3}\right)}$$

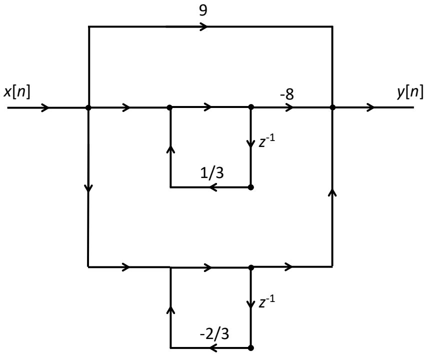
Si ha

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2z^2 - \frac{8}{3}z - 2}{z\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z + \frac{2}{3}\right)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C}{z + \frac{2}{3}}$$

Risulta $A = 9$, $B = -8$ e $C = 1$ e quindi

$$H(z) = 9 - \frac{8}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}$$

In figura è riportata la topologia del circuito.



Esercizio 4

Disegnare la configurazione in cascata con celle del secondo ordine della funzione di rete

$$H(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}e^{j\frac{7\pi}{8}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\frac{7\pi}{8}}z^{-1}\right)}$$

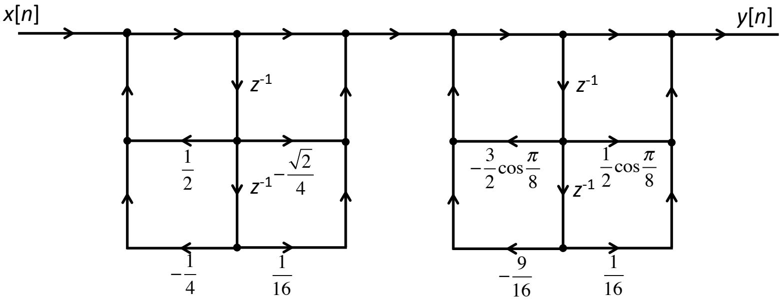
Si può porre

$$H_1(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}z^{-1}\right)} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{4}z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

e

$$H_2(z) = \frac{\left(1 + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{8}}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{8}}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}e^{j\frac{7\pi}{8}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\frac{7\pi}{8}}z^{-1}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{8})z^{-1} + \frac{1}{16}z^{-2}}{1 + \frac{3}{2}\cos(\frac{\pi}{8})z^{-1} + \frac{9}{16}z^{-2}}$$

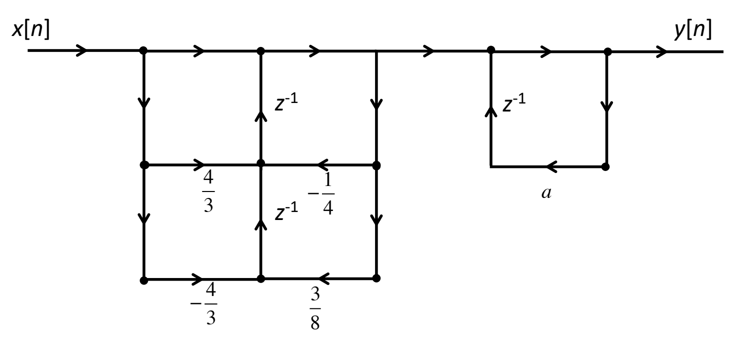
La cascata di $H_1(z)$ e $H_2(z)$ è mostrata in figura.



■

Esercizio 5

Dato il circuito in figura



dire se esiste qualche valore del parametro *a* che consente di ridurre il circuito ad una seconda forma diretta del secondo ordine.

Il circuito è la cascata di due forme trasposte dirette del secondo tipo.

Esempio di sintesi

La funzione di rete del circuito è

$$H(z) = \frac{1 + \frac{4}{3}z^{-1} - \frac{4}{3}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

che si può scrivere nella forma

$$H(z) = \frac{\left(1 + 2z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right)\left(1 - az^{-1}\right)}$$

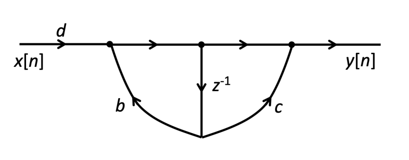
Affinché sia possibile ridurre il circuito ad una forma del secondo ordine (cioè con due poli), deve verificarsi una cancellazione polo-zero. Sono possibili due casi:

1. $a = -2$;
2. $a = \frac{2}{3}$.

■

Esercizio 6

Il grafo di seguito rappresentato



è una implementazione della funzione di rete *passatutto*

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 0,54}{1 - 0,54z^{-1}}$$

Determinare i valori dei coefficienti b, c e d. Dire inoltre se il filtro rimane passatutto anche in presenza di quantizzazione dei coefficienti e, in caso contrario, individuare una architettura che abbia invece questa proprietà.

Sintesi di un filtro *passatutto*

Bisogna innanzitutto determinare la funzione di rete del circuito rappresentato, lavorando nel dominio di z. Si indica con $Q(z)$ l'ingresso dell'elemento di ritardo. Il circuito è descritto dalle equazioni

$$\begin{aligned} Q(z) &= dX(z) + bz^{-1}Q(z) \\ Y(z) &= Q(z) + cz^{-1}Q(z) \end{aligned}$$

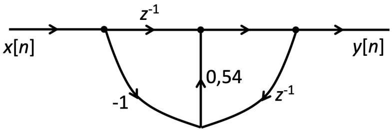
Ricavando $Q(z)$ dalla prima equazione e sostituendo l'espressione trovata nella seconda equazione si ha

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{cdz^{-1} + d}{1 - bz^{-1}}$$

Confrontando con la formula data, si trovano $d = -0,54$, $b = 0,54$ e $c = -\frac{1}{0,54} = -1,852$.

In presenza di quantizzazione dei coefficienti del filtro, indicati utilizzando il simbolo $\hat{\cdot}$, risulta $\hat{c}\hat{d} \neq 1$ e $\hat{d} \neq -\hat{b}$. Quindi il filtro non è più *passatutto*.

Il filtro dato può essere realizzato anche mediante l'architettura seguente



In questo caso la quantizzazione riguarda solo il coefficiente $0,54$ e quindi il circuito rimane *passatutto*.

■