Circuiti a tempo discreto

Esercizi d'esame risolti

Raffaele Parisi

Dipartimento DIET, Università di Roma "La Sapienza"

Esercizio 1

Determinare se il circuito caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita

$$y[n] = sen\{x[n+1]\}$$

sia *lineare*, *tempo-invariante*, *stabile* e *causale*.

Il circuito

- *non è lineare*;
- è *tempo-invariante*, perchè una traslazione dell'indice origina la traslazione dell'uscita;
- è *stabile*, perchè la funzione *sen* è sempre limitata;
- *non è causale*, perchè l'uscita all'istante n dipende dall'ingresso all'istante $n+1$.

■

Esercizio 2

Determinare se il circuito caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita

$$y[n] = e^{\tan\{x[n]\}}$$

sia *lineare*, *tempo-invariante*, *stabile* e *causale*.

Il circuito

- *non è lineare*;
- è *tempo-invariante*, in quanto una traslazione dell'indice origina la traslazione dell'uscita;
- *non è stabile*, perchè per $x[n] = \frac{\pi}{2}$ la funzione tende a $+\infty$;
- è *causale*, perchè il legame ingresso-uscita è istantaneo.

■

Esercizio 3

Dire se le seguenti sequenze sono periodiche e in caso di risposta affermativa calcolarne il periodo N:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \cos(0,125\pi n) \\ x_2[n] &= e^{j\frac{\pi}{16}n} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{17}n\right) \end{aligned}$$

Si ricorda che una sequenza $x[n]$ è periodica di periodo N se risulta $x[n+N] = x[n]$, $\forall\ N$ intero.
Nel primo caso si deve avere

$$\cos(0,125\pi(n+N)) = \cos(0,125\pi n) \Rightarrow 0,125\pi N = 2k\pi$$

quindi deve essere $N = \frac{2k}{0{,}125} = 16k$, con k intero. Per esempio per $k = 1$ si ha $N = 16$ e la sequenza $x_1[n]$ è periodica.

Nel secondo caso deve essere

$$e^{j\frac{\pi}{16}(n+N)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{17}(n+N)\right) = e^{j\frac{\pi}{16}n} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{17}n\right)$$

cioè si deve avere contemporaneamente

$$\frac{\pi}{16}N = 2k\pi \Rightarrow N = 32k$$

e

$$\frac{\pi}{17}N = 2k'\pi \Rightarrow N = 34k'$$

con k e k' interi. Per esempio per $N = 544$ ($k = 17$ e $k' = 16$) si ha

$$e^{j\frac{\pi}{16}(n+544)} = e^{j(\frac{\pi}{16}n+34\pi)} = e^{j\frac{\pi}{16}n}$$

e

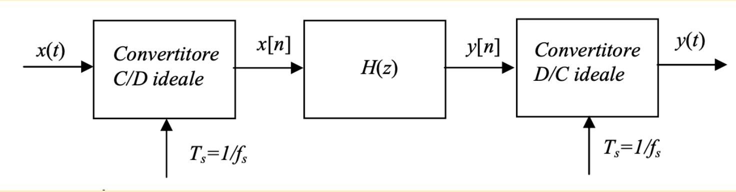
$$\cos\left(\frac{\pi}{17}(n+544)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{17}n + 32\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{17}n\right)$$

e anche la sequenza $x_2[n]$ è periodica.

■

Esercizio 4

Dato il circuito analogico



si supponga

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(1500\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

e

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} - z^{-2})$$

Ipotizzando che sia $f_s = 1000Hz$, trovare l'espressione di $y(t)$.

Le frequenze dei segnali sono tutte inferiori a $f_s/2$, quindi non c'è *aliasing*. Il segnale campionato è

$$x[n] = 3 + 2\cos\left(0,1\pi n - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(0,375\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$

La *risposta in frequenza* del circuito è

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-j\omega} - e^{-2j\omega}\right)$$

Le pulsazioni del segnale in ingresso sono $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0,1\pi$ e $\omega_3 = 0,375\pi$, quindi l'uscita del filtro è

$$\begin{aligned} y[n] = \quad & 3 \cdot H(e^{j\cdot 0}) + \\ & +2|H(e^{j0,1\pi})|\cos\left(0,1\pi n - \tfrac{\pi}{4} + \arg\{H(e^{j0,1\pi})\}\right) + \\ & -|H(e^{j0,375\pi})|\cos\left(0,375\pi n + \tfrac{\pi}{6} + \arg\{H(e^{j0,375\pi})\}\right) \end{aligned}$$

Risulta

$$y[n] = \frac{3}{4} + 0,5878\cos\left(0,1\pi n - \frac{\pi}{4} + 0,2394\right) + \\ -0,5253\cos\left(0,375\pi n + \frac{\pi}{6} - 0,1034\right)$$

Il segnale analogico ricostruito è

$$y(t) = \frac{3}{4} + 0,5878\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4} + 0,2394\right) + \\ -0,5253\cos\left(1500\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{6} - 0,1034\right)$$

■

Esercizio 5

Dato il segnale analogico

$$x(t) = 3\cos(100\pi t)$$

1. determinare la *minima frequenza di campionamento* che consente di evitare *aliasing*;
2. scrivere l'espressione della sequenza ottenuta campionando il segnale alla frequenza $F_s = 200Hz$;
3. scrivere l'espressione della sequenza ottenuta campionando il segnale alla frequenza $F_s = 75Hz$;
4. determinare la frequenza F' di un'altra sinusoide con $0 < F < F_s = 75Hz$ il cui campionamento genera una sequenza identica a quella del caso 3.

1. Il segnale è una sinusoide di frequenza $F = 50Hz$. Affinché sia possibile ricostruire esattamente il segnale, è necessario campionare ad una frequenza superiore a $100Hz$.
2. Con $F_s = 200Hz$ si ha

$$x[n] = 3\cos\left(2\pi\frac{50}{200}n\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

3. Con $F_s = 75Hz$ si ha

$$x[n] = 3\cos\left(2\pi\frac{50}{75}n\right) = 3\cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right)$$

4. Si ha $F' = 75 - 50 = 25Hz$. La sinusoide $x'(t) = 3\cos(50\pi t)$ campionata alla frequenza $F_s = 75Hz$ produce infatti la sequenza

$$x'[n] = 3\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right) = 3\cos\left((2\pi - \frac{4}{3}\pi)n\right) = 3\cos\left(\frac{4}{3}\pi n\right) = x[n]$$

La sequenza $x[n]$ è caratterizzata da *folding*.
■

Esercizio 6

Dato il segnale analogico

$$x(t) = 2e^{j(2\pi ft + \frac{\pi}{3})}$$

supponendo che la frequenza di campionamento sia $f_s = 200Hz$, determinare due frequenze f che a partire da $x(t)$ generano la stessa sequenza numerica, spiegandone il motivo e le conseguenze.

Poichè la frequenza di campionamento è $200Hz$, una prima frequenza può essere scelta nell'intervallo $0 \div f_s/2$, per esempio $f_1 = 60Hz$. La seconda frequenza può essere una frequenza di *aliasing*, per esempio $f_2 = 260Hz$. Le sequenze generate risultano

$$x_1[n] = 2e^{j(2\pi f_1 \frac{n}{f_s} + \frac{\pi}{3})} = 2e^{j(\frac{3}{5}\pi n + \frac{\pi}{3})}$$

e

$$x_2[n] = 2e^{j(2\pi f_2 \frac{n}{f_s} + \frac{\pi}{3})} = 2e^{j(2\pi \frac{260}{200} + \frac{\pi}{3})} = 2e^{j(2\pi \frac{10+3}{10} n + \frac{\pi}{3})} = x_1[n]$$

La frequenza $f_3 = f_s - f_1 = 140Hz$ fornisce invece un caso di *folding*. In questo caso

$$x_3[n] = 2e^{j(2\pi f_3 \frac{n}{f_s} + \frac{\pi}{3})} = 2e^{j(2\pi \frac{140}{200} + \frac{\pi}{3})} = 2e^{j(2\pi \frac{10-3}{10} n + \frac{\pi}{3})} = 2e^{-j(\frac{3}{5}\pi n - \frac{\pi}{3})}$$

■

Esercizio 7

Data la seguente equazione

$$y[n] = 2x[n-1] + 5y[n-1] - 6y[n-2]$$

determinare

1. la *risposta omogenea* del circuito;
2. la *risposta impulsiva* nell'ipotesi di causalità;
3. la *risposta al gradino*.

1. La *risposta omogenea* del circuito è la soluzione dell'equazione in assenza di ingresso. Si tratta di risolvere l'equazione omogenea

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$$

La soluzione è del tipo

$$y_{om}[n] = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n$$

Sostituendo $A\alpha^n$ nell'equazione si trova

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0$$

Si trova $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 2$ e quindi

$$y_{om}[n] = A_1 3^n + A_2 2^n$$

Le costanti A_1 e A_2 devono essere determinate sulla base della conoscenza delle condizioni iniziali.
2. La *risposta impulsiva* si ottiene calcolando innanzitutto la funzione di rete. Si ottiene

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{2z}{z^2 - 5z + 6}$$

Lo sviluppo in frazioni parziali fornisce l'espressione

$$H(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{2z}{z-2}$$

che antitrasformata dà

$$h[n] = (2 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n) \cdot u[n]$$

3. La *risposta al gradino* si ottiene dalla trasformata z dell'uscita

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{2z}{z^2 - 5z + 6} \cdot \frac{z}{z - 1}$$

Lo sviluppo in frazioni parziali in questo caso fornisce

$$Y(z) = \frac{3z}{z-3} - \frac{4z}{z-2} + \frac{z}{z-1}$$

e quindi

$$y[n] = (3 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 1) \cdot u[n]$$

Si noti che l'uscita diverge in quanto il circuito non è stabile.

■

Esercizio 8

In un circuito *TD* l'ingresso è

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] + 2u[n]$$

mentre la trasformata z dell'uscita risulta

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Ipotizzando che il circuito sia *causale*, calcolare la *funzione di rete* $H(z)$, la sua *ROC* e la *risposta impulsiva* $h[n]$.

La sequenza d'ingresso non è né causale né anticausale. La sua trasformata z è

$$X(z) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{2}{1 - z^{-1}}$$

cioè

$$X(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

Risulta quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{z(z-1)}{\left(z + \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

Poiché il circuito è causale, la regione di convergenza di $H(z)$ è $|z| > \frac{1}{3}$. Si noti che lo zero in $z = 1$ cancella il gradino in ingresso. Per antitrasformare $H(z)$, bisogna innanzitutto calcolare lo sviluppo in frazioni parziali di $\frac{H(z)}{z}$. Si trova

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{A}{z + \frac{1}{3}} + \frac{B}{z - \frac{1}{4}}$$

in cui

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z \to -\frac{1}{3}} \frac{H(z)}{z}\left(z + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{7} \\ B &= \lim_{z \to \frac{1}{4}} \frac{H(z)}{z}\left(z - \frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{7} \end{aligned}$$

Si ha

$$h[n] = \left[\frac{16}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u[n]$$

■

Esercizio 9

Data la funzione di rete

$$H(z) = \frac{3}{\left(1 - 7z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

1. si calcolino gli andamenti della risposta impulsiva per le diverse *ROC* possibili;
2. nell'ipotesi di *circuito stabile*, si calcoli la risposta permanente all'ingresso

$$x[n] = 8 + 2\cos\left(0,25\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$

1. Lo sviluppo in frazioni parziali di $\frac{H(z)}{z}$ è

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{3z}{(z-7)(z-\frac{1}{3})} = \frac{A}{z-7} + \frac{B}{z-\frac{1}{3}}$$

Risulta $A = \frac{63}{20}$ e $B = -\frac{3}{20}$ e quindi

$$H(z) = \frac{63}{20}\frac{z}{z-7} - \frac{3}{20}\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$$

Per la risposta impulsiva si hanno tre possibilità:
a) la ROC è $|z| < \frac{1}{3}$ quindi

$$h[n] = \left\{-\frac{63}{20}\cdot 7^n + \frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}u[-n-1]$$

b) La ROC è $\frac{1}{3} < |z| < 2$ quindi

$$h[n] = -\frac{63}{20}\cdot 7^n u[-n-1] - \frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

c) La ROC è $|z| > 2$ quindi

$$h[n] = \left\{\frac{63}{20}\cdot 7^n - \frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}u[n]$$

2. La condizione di stabilità impone di scegliere la seconda ROC, che comprende al suo interno il cerchio unitario. Si noti che in questo caso il circuito è stabile ma non causale. La risposta in frequenza è

$$H(e^{j\omega}) = \frac{3e^{2j\omega}}{\left(e^{j\omega} - 7\right)\left(e^{j\omega} - \frac{1}{3}\right)}$$

La risposta all'ingresso $x[n]$ è

$$y[n] = 8 \cdot H(e^{j0}) + 2 \cdot |H(e^{j \cdot 0,25\pi})| \cos\left(0,25\pi n + \frac{\pi}{6} + \arctan\left\{H(e^{j \cdot 0,25\pi})\right\}\right)$$

Numericamente risulta

$$y[n] = -6 + 1,1846 \cos\left(0,25\pi n + \frac{\pi}{6} - 2,5434\right)$$

■

Esercizio 10

Dato il circuito *causale* avente funzione di rete

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

1. scrivere l'equazione alle differenze che mette in relazione ingresso e uscita del circuito;
2. disegnare il diagramma poli-zeri e indicare la *ROC*, verificando se il circuito è anche stabile;
3. calcolare la risposta impulsiva $h[n]$.

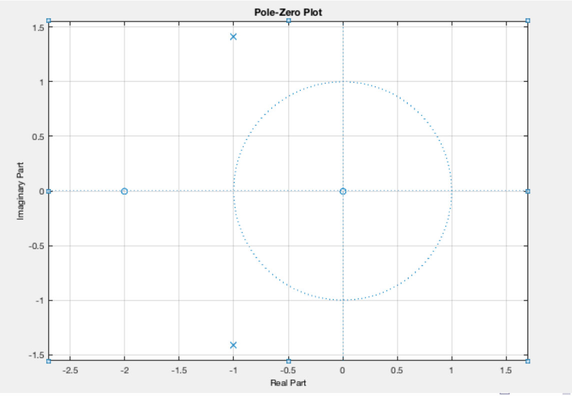
1. L'equazione alle differenze può essere ricavata direttamente dalla funzione di rete $H(z)$. Si ottiene

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 2y[n-1] - 3y[n-2]$$

2. La funzione di rete si può scrivere anche nella forma

$$H(z) = \frac{z(z+2)}{z^2 + 2z + 3}$$

e quindi i poli sono $p_1 = -1 + j\sqrt{2}$ e $p_2 = p_1^* = -1 - j\sqrt{2}$ e gli zeri $z_1 = 0$ e $z_2 = -2$, che sono tracciati nella figura.



Poichè i poli sono esterni al cerchio unitario, il circuito (ipotizzato causale) non è stabile.

3. Bisogna calcolare lo sviluppo in frazioni parziali di $\frac{H(z)}{z}$. Si ha

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z+2}{z^2+2z+3} = \frac{A}{z-(-1+j\sqrt{2})} + \frac{A^*}{z-(-1-j\sqrt{2})}$$

Si trova

$$A = \frac{2-j\sqrt{2}}{4}$$

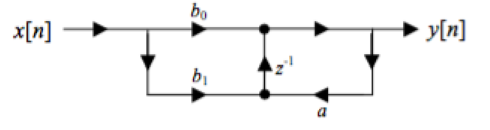
La *ROC* in cui il circuito è causale è individata dalla condizione $|z| > |-1+j\sqrt{2}| = \sqrt{3}$. L'antitrasformata risulta

$$h[n] = \frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{3}^n \cos(\arctan\sqrt{2}\cdot n + \arctan\frac{\sqrt{2}}{2})$$

■

Esercizio 11

Nel circuito rappresentato in figura



calcolare la risposta permanente e la risposta transitoria all'ingresso

$$x[n] = 3e^{j\frac{\pi}{6}n}u[n]$$

supponendo $b_0 = 2, b_1 = 1, a = \frac{1}{3}$ e stato iniziale nullo.

Si tratta di un circuito del primo ordine nella seconda forma diretta trasposta. La sua funzione di rete è

$$H(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = 2 \cdot \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}}$$

Il circuito è stabile e causale. La risposta permanente $y_p[n]$ si può calcolare utilizzando la formula

$$y_p[n] = 3 \cdot |H(e^{j\frac{\pi}{6}})| e^{j(\frac{\pi}{6}n + \arctan\{H(e^{j\frac{\pi}{6}})\})} u[n]$$

Risulta

$$y_p[n] = 3 \cdot 3,9821 \cdot e^{j(\frac{\pi}{6}n - 0,4029)} u[n]$$

Per calcolare la risposta transitoria, bisogna innanzitutto calcolare l'uscita nel dominio di z

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

in cui

$$X(z) = \frac{3}{1 - e^{j\frac{\pi}{6}} z^{-1}} = \frac{3z}{z - e^{j\frac{\pi}{6}}}$$

Si ha

$$Y(z) = 2 \cdot \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}} \cdot \frac{3z}{z - e^{j\frac{\pi}{6}}}$$

Risposta permanente e risposta transitoria

Lo sviluppo in frazioni parziali fornisce l'espressione

$$Y(z) = \frac{Az}{z - \frac{1}{3}} + \frac{Bz}{z - e^{j\frac{\pi}{6}}}$$

in cui

$$A = \lim_{z \to \frac{1}{3}} \frac{Y(z)}{z} = 6,8438 \cdot e^{j \cdot 2,3878}$$

La risposta transitoria $y_t[n]$ è quindi

$$y_t[n] = 6,8438 \cdot e^{j \cdot 2,3878} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

■

Esercizio 12

Data la funzione di rete

$$H(z) = \left(1 - \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}z^{-1}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)$$

determinare la funzione di rete a fase minima e la funzione di rete passatutto corrispondenti.

La funzione ha una coppia di zeri esterni alla circonferenza di raggio uno e una coppia di zeri interni. Gli zeri esterni sono $z_1 = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}$ e $z_2 = z_1^* = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}$. Il termine contenente lo zero z_1 si può scrivere nella forma

$$1 - \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}z^{-1} = -\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{6}}\left(z^{-1} - \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)$$

Decomposizione fase minima-passatutto

che porta al termine passatutto

$$H_{ap}^{(1)}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1 - \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}z^{-1}}$$

Nello stesso modo si procede per lo zero z_2, ottenendo

$$H_{ap}^{(2)}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{6}}}{1 - \frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{6}}z^{-1}}$$

La funzione passatutto complessiva è dunque

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}}{1 - \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - \frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{6}}}{1 - \frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{6}}z^{-1}}$$

La funzione a fase minima risulta

$$H_{min}(z) = \frac{9}{4}\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\cdot \\ \cdot\left(1 - \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{2}{3}e^{j\frac{\pi}{6}}z^{-1}\right)$$

che contiene anche un termine di guadagno.

■

Esercizio 13

Determinare il circuito a fase minima avente la seguente risposta in ampezza quadratica

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\frac{5}{4} - \cos\omega}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos\omega}$$

Si ricorda che $C(z) = H(z)H^*(\frac{1}{z^*})\Big|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})|^2$, in cui

$$H(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{\prod(1 - c_k z^{-1})}{\prod(1 - d_k z^{-1})}$$

e quindi

$$C(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}{\prod(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z)}$$

Poichè

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}{\frac{10}{9} - \frac{1}{3}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right)}$$

si trova

$$C(z) = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right)}{\frac{10}{9} - \frac{1}{3}\left(z + z^{-1}\right)} = \frac{3}{2}\frac{(z - \frac{1}{2})(z - 2)}{(z - \frac{1}{3})(z - 3)}$$

che si può scrivere nella forma

$$C(z) = \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z)}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(z - \frac{1}{3}z)}$$

La funzione $H(z)$ cercata è allora

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

■