Circuiti per la multimedialità

Esercitazione n. 1
Circuiti *TD* nel dominio del tempo

Raffaele Parisi

Dipartimento DIET, Università di Roma "La Sapienza"

Esercizio 1

Determinare se il circuito caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita

$$y[n] = T\{x[n]\} = \log|x[n]|$$

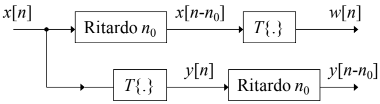
sia *lineare*, *tempo-invariante*, *stabile* e *causale*.

Il circuito naturalmente *non è lineare*. Non vale infatti la sovrapposizione degli effetti

$$a_1 \log|x_1[n]| + a_2 \log|x_2[n]| \neq \log|a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]|$$

Proprietà della relazione ingresso-uscita

Il circuito è invece *tempo-invariante*. Considerando infatti lo schema seguente



risulta

$$w[n] = \log|x[n-n_0]| = y[n-n_0]$$

Il circuito *non è stabile*, in quanto se risulta $|x[n]| = 0$ l'uscita è infinita.
Il circuito infine è *causale* in quanto l'uscita all'istante n-esimo dipende solo dall'ingresso nello stesso istante.
■

Esercizio 2

Determinare se il circuito caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita

$$y[n] = T\{x[n]\} = x[Mn]$$

con M intero positivo, sia *lineare*, *tempo-invariante*, *stabile* e *causale*.

Si tratta di un *decimatore*. È un circuito *lineare*, come si può facilmente verificare.
Per quanto riguarda la tempo-invarianza, si ha

$$w[n] = x[M(n - n_0)] \neq y[n - n_0] = x[Mn - n_0]$$

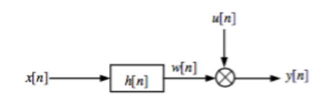
e quindi il circuito *non è invariante* rispetto al tempo.

Il circuito naturalmente è *stabile* ma *non causale*. Infatti per esempio se $n = 1$, risulta $y[1] = x[M]$, cioè il valore dell'uscita dipende da un valore futuro dell'ingresso.

■

Esercizio 3

Determinare se il circuito rappresentato in figura



in cui la *risposta impulsiva* $h[n]$ è

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+10]$$

sia *lineare*, *tempo-invariante*, *stabile* e *causale*.

L'uscita è

$$y[n] = w[n] \cdot u[n] = h[n] * x[n] \cdot u[n]$$

Il circuito è *lineare* e *causale*, per la presenza del gradino unitario $u[n]$ moltiplicativo. Si noti che il circuito più interno, di risposta impulsiva $h[n]$, non è causale.
Il circuito *non è tempo-invariante*, in quanto il gradino moltiplicativo non viene traslato nella prova di invarianza.
Per quanto riguarda la stabilità, la risposta impulsiva del circuito complessivo $h'[n]$ è

$$h'[n] = h[n] \cdot u[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Risulta quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h_1[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

cioè la risposta impulsiva è *assolutamente sommabile* e il circuito quindi è *stabile*.
■

Esercizio 4

Determinare se il circuito caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=\hat{n}}^{n} x[k]$$

sia *lineare*, *tempo-invariante*, *stabile* e *causale*.

Il circuito è *lineare*. Infatti si ha

$$T\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = \sum_{k=\hat{n}}^{n} a_1 x_1[k] + a_2 x_2[k] =$$

$$= a_1 \sum_{k=\hat{n}}^{n} x_1[k] + a_2 \sum_{k=\hat{n}}^{n} x_2[k] = a_1 T\{x_1[n]\} + a_2 T\{x_2[n]\}$$

Proprietà della relazione ingresso-uscita

Per quanto riguarda l'invarianza rispetto al tempo, si ha

$$T\{x[n-n_0]\} = \sum_{k=\hat{n}}^{n} x[k-n_0] = \sum_{k=\hat{n}-n_0}^{n-n_0} x[k]$$

mentre invece risulta

$$y[n-n_0] = \sum_{k=\hat{n}}^{n-n_0} x[k]$$

Il circuito quindi *non è tempo-invariante*, in quanto in generale $y[n-n_0] \neq T\{x[n-n_0]\}$.
Il circuito *non è stabile*. Infatti se si fa l'ipotesi che sia $|x[n]| < c_1$, risulta

$$|y[n]| = |\sum_{k=\hat{n}}^{n} x[k]| \leq \sum_{k=\hat{n}}^{n} |x[k]| \leq (|n-\hat{n}|+1)c_1$$

e quindi $|y[n]|$ non risulta limitato quando $n \to +\infty$.
Infine il circuito è *causale*, in quanto $y[n]$ non dipende da valori futuri dell'ingresso (se si fa l'ipotesi che sia $\hat{n} \leq n$).
■

Esercizio 5

Determinare se il circuito caratterizzato dalla relazione ingresso-uscita

$$y[n] = T\{x[n]\} = x[-n]$$

sia *lineare*, *tempo-invariante*, *stabile* e *causale*.

Si tratta di un circuito *ribaltatore*. Il circuito è *lineare*, in quanto

$$T\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\} = a_1x_1[-n]+a_2x_2[-n] = a_1T\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$$

Non è invece tempo-invariante. Infatti

$$T\{x[n-n_0]\} = x[-n+n_0] \neq y[n-n_0] = x[-n-n_0]$$

Il circuito è *stabile*, perchè se si suppone $|x[n]| \leq c_1$ si ha

$$|y[n]| = |T\{x[n]\}| = |x[-n]| \leq c_1$$

Il circuito infine naturalmente *non è causale*.
■

Esercizio 6

Determinare la somma di convoluzione tra le sequenze $x_1[n] = \{-1, 3, 2\}$ e $x_2[n] = \{4, -3, 1, -1\}$, entrambe con elemento iniziale in $n = 0$ (*causali*).

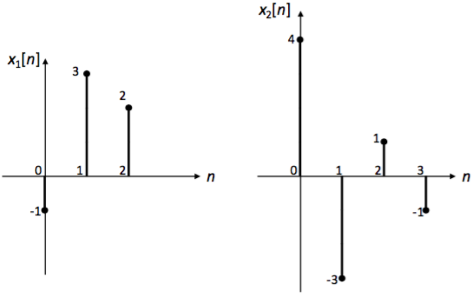
La somma di convoluzione è definita dall'espressione

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

e può essere calcolata innanzitutto graficamente.

Somma di convoluzione

Le due sequenze sono rappresentate in figura.



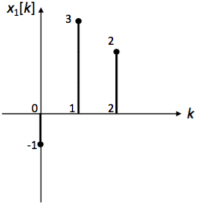
Il valore $y[0]$ può essere calcolato dall'espressione

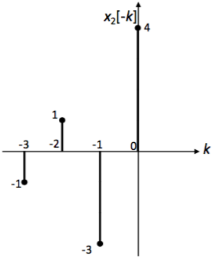
$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]x_2[-k]$$

e richiede il ribaltamento della sequenza $x_2[n]$ rispetto all'asse delle ordinate.

Somma di convoluzione

Il valore cercato è la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei vettori $x_1[n]$ e $x_2[-n]$. La figura mostra le due sequenze ottenute.

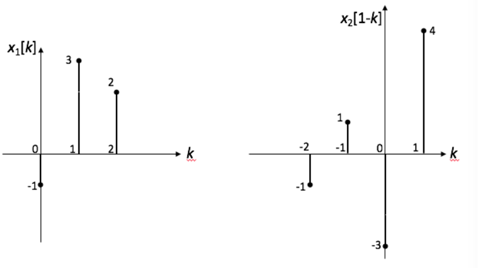




Risulta $y[0] = -4$.
Tutte le sequenze $x_2[n-k]$ con $n < 0$ corrispondono a traslazioni a sinistra della sequenza ribaltata. Quindi risulta sempre $y[n] = 0$ per $n < 0$.

Somma di convoluzione

Per valori $n > 0$ si ha invece sovrapposizione parziale delle due sequenze. La figura mostra le sequenze $x_1[k]$ e $x_2[1-k]$. In questo caso si ottiene $y[1] = (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 15$



Proseguendo con la traslazione si calcolano i valori rimanenti della convoluzione. Risulta $y[n] = \{-4, 15, -2, -2, -1, -2\}$, con il primo elemento che corrisponde a $n = 0$.
La somma di convoluzione risulta sempre nulla non appena la sequenza x_2 ribaltata e traslata non si sovrappone più alla sequenza x_1. Nell'esercizio questo avviene per $n > 5$.

Somma di convoluzione

La convoluzione può essere calcolata anche con il *metodo tabellare*. Si tratta di calcolare tutte le sequenze $x_1[k]x_2[n-k]$ per i valori possibili di k ($0 \leq k \leq 2$ nell'esempio) e poi sommarle. Questa operazione può essere visualizzata con la tabella riportata in figura.

n	0	1	2	3	4	5
$x_1[n]$	-1	3	2			
$x_2[n]$	4	-3	1	-1		
$x_1[0]x_2[n]$	-4	3	-1	1		
$x_1[1]x_2[n-1]$	0	12	-9	3	-3	
$x_1[2]x_2[n-2]$	0	0	8	-6	2	-2
$y[n]$	-4	15	-2	-2	-1	-2

La sequenza ottenuta è la convoluzione di due sequenze causali ed è anch'essa causale.

■

Esercizio 7

Determinare la somma di convoluzione tra le sequenze
$x_1[n] = \{2, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-3}, 1, 2\}$ e $x_2[n] = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{3}, -2\}$.

Utilizzando il metodo tabellare si ha

n	-1	0	1	2	3
$x_1[n]$	2	-3	1	2	
$x_2[n]$		3	-2		
$x_1[-1]x_2[n+1]$	6	-4			
$x_1[0]x_2[n]$		-9	6		
$x_1[1]x_2[n-1]$			3	-2	
$x_1[2]x_2[n-2]$				6	-4
$y[n]$	6	-13	9	4	-4

■

Esercizio 8

Determinare l'uscita di un circuito lineare tempo-invariante avente risposta impulsiva $h[n] = a^n u[-n-1]$ all'ingresso $x[n] = u[n]$ mediante la somma di convoluzione.

La convoluzione si può calcolare direttamente

$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[-k-1]u[n-k] = \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} a^k = \sum_{k=-n}^{+\infty} a^{-k} & \text{per} \quad n \leq -1 \\ \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} & \text{per} \quad n > -1 \end{cases} \quad =
\end{aligned}
$$

Somma di convoluzione

$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} a^{-k} - \sum_{k=0}^{-n-1} a^{-k} = \frac{1}{1-1/a} - \frac{1-1/a^{-n}}{1-1/a} \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{-k} - 1 = \frac{1}{1-1/a} - 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{a^n}{1-1/a} & \text{per} \quad n \leq -1 \\ \frac{1/a}{1-1/a} & \text{per} \quad n > -1 \end{cases}$$

■

Esercizio 9

Determinare la soluzione dell'equazione omogenea

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = 0$$

con condizioni iniziali $y[0] = -62$ e $y[1] = -30$.

Le soluzioni delle equazioni alle differenze omogenee sono le *sequenze esponenziali* $y_{om}[n] = c\lambda^n$. I termini λ si trovano sostituendo questa espressione nell'equazione data. Si ottiene l'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

che ha le soluzioni $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 1$.

La forma generale della soluzione è dunque

$$y_{om}[n] = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2$$

Le costanti c_1 e c_2 si trovano a partire dalle condizioni iniziali. Si ha infatti

$$\begin{cases} y_{om}[0] = c_1 + c_2 = -62 \\ y_{om}[1] = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = -30 \end{cases}$$

da cui si ricava $c_1 = -64$ e $c_2 = 2$. La soluzione è quindi

$$y_{om}[n] = -64 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

■

Esercizio 10

Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2$$

con condizioni iniziali $y[-1] = y[-2] = 0$.

Innanzitutto si deve risolvere l'equazione omogenea associata $y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

che ha le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. La soluzione omogenea è dunque

$$y_{om}[n] = c_1 2^n + c_2 3^n$$

La soluzione particolare deve essere cercata nella famiglia di funzioni dell'ingresso. In questo caso deve essere $y_{par}[n] = c_3$. Ponendo questo valore nell'equazione si ottiene $c_3 = 1$. La soluzione generale dell'equazione non omogenea è dunque

$$y[n] = y_{om}[n] + y_{par}[n] = c_1 2^n + c_2 3^n + 1$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano a partire dalle condizioni iniziali risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y[-1] = c_1 2^{-1} + c_2 3^{-1} + 1 = 0 \\ y[-2] = c_1 2^{-2} + c_2 3^{-2} + 1 = 0 \end{cases}$$

Si trovano $c_1 = -8$ e $c_2 = 9$ e quindi la soluzione finale è

$$y[n] = -8 \cdot 2^n + 9 \cdot 3^n + 1$$

■

Esercizio 11

Determinare la soluzione dell'equazione non omogenea

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = 3^{-n} + 1$$

con condizioni iniziali $y[-1] = 2$ e $y[-2] = 0$.

Innanzitutto si deve risolvere l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

e ha le soluzioni $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. La soluzione omogenea è dunque

$$y_{om}[n] = c_1 + c_2 2^{-n}$$

Le soluzioni particolari devono essere cercate nelle famiglie degli ingressi. La prima è del tipo $y_{par_1}[n] = c_3 3^{-n}$. Sostituendo nell'equazione di partenza si trova $c_3 = 1$.
Per quanto riguarda la seconda soluzione particolare, dovrebbe essere una sequenza costante. Poichè però la soluzione costante è già presente nella soluzione dell'equazione omogenea, è necessario aumentare la moltiplicità e cercare una soluzione particolare del tipo $y_{par_2}[n] = c_4 n$. Sostituendo nell'equazione, si trova $c_4 = 2$.
La soluzione generale è dunque

$$y[n] = y_{om}[n] + y_{par_1}[n] + y_{par_2}[n] = c_1 + c_2 2^{-n} + 3^{-n} + 2n$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano a partire dalle condizioni iniziali risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y[-1] = c_1 + 2c_2 + 3 - 2 = 2 \\ y[-2] = c_1 + 4c_2 + 9 - 4 = 0 \end{cases}$$

Si trovano $c_1 = 7$ e $c_2 = -3$ e quindi la soluzione finale è

$$y[n] = 7 - 3 \cdot 2^{-n} + 3^{-n} + 2n$$

$\blacksquare$