

# Circuiti per la multimedialità

## Esercitazione n. 2

### Circuiti *TD* nel dominio della frequenza

Raffaele Parisi

Dipartimento DIET, Università di Roma "La Sapienza"

## Esercizio 1

Calcolare la *DTFT* della sequenza

$$x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-4]$$

Usando la definizione di *DTFT*, si ha

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n-4]e^{-j\omega n}$$

A causa del gradino, si può scrivere

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n} - \sum_{n=0}^3 \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{-j\omega n}$$

# La trasformata di Fourier a tempo-discreto (*DTFT*)

Utilizzando le espressioni della somma di una serie e di una successione geometrica, si ottiene

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} - \frac{1 - \left(\frac{3}{4}e^{-j\omega}\right)^4}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}}$$



## Esercizio 2

Calcolare la *DTFT* della sequenza

$$x[n] = u[n] - u[n - N]$$

in cui  $N$  è un numero intero dato.

Si ha

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u[n] - u[n - N])e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \\ &= \frac{1 - e^{-jN\omega}}{1 - e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

# La trasformata di Fourier a tempo-discreto (*DTFT*)

L'espressione trovata si può scrivere anche nella forma

$$X(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{-j\frac{1}{2}\omega}} \cdot \frac{e^{j\frac{N}{2}\omega} - e^{-j\frac{N}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega}} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega}$$

In modulo e fase

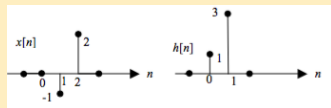
$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega} \right| \\ \angle X(e^{j\omega}) &= -\frac{N-1}{2}\omega + \arg \left\{ \frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega} \right\} \end{aligned}$$

Si noti la presenza del termine  $\arg \left\{ \frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega} \right\}$  nella fase, dovuto al fatto che  $\frac{\operatorname{sen} \frac{N}{2}\omega}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega}$  può essere positivo o negativo.



## Esercizio 3

Date le sequenze in figura



calcolare la loro convoluzione utilizzando la *DTFT*.

Si ha  $X(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega}$  e  $H(e^{j\omega}) = 1 + 3e^{-j\omega}$  e quindi

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = -e^{-j\omega} - e^{-2j\omega} + 6e^{-3j\omega}$$

$$y[n] = -\delta[n-1] - \delta[n-2] + 6\delta[n-3]$$



## Esercizio 4

Calcolare la DTFT inversa della funzione

$$X(e^{j\omega}) = e^{j\omega K}$$

in cui  $K$  è un numero intero dato.

La DTFT inversa naturalmente è immediata ed è semplicemente  $x[n] = \delta[n + K]$ . In generale è possibile calcolare l'antitrasformata ricorrendo alla definizione

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega K} e^{j\omega n} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(K+n)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(K+n)} \cdot e^{j\omega(K+n)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{j(K+n)} \cdot \left( e^{j(K+n)\pi} - e^{-j(K+n)\pi} \right) = \\ &= \frac{\text{sen}[(K+n)\pi]}{(K+n)\pi} \end{aligned}$$

La funzione  $\frac{\text{sen } m\pi}{m\pi}$  è sempre nulla per  $m \neq 0$ , mentre vale 1 per  $m = 0$ . Quindi

$$x[n] = \frac{\text{sen}[(K+n)\pi]}{(K+n)\pi} = \begin{cases} 1 & \text{per } n = -K \\ 0 & \text{per } n \neq -K \end{cases}$$

cioè  $x[n] = \delta[n + K]$ .





## Esercizio 5

Calcolare la *risposta in frequenza* del circuito caratterizzato dall'equazione

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

Calcolando la *DTFT* di entrambi i membri di questa equazione si ottiene

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + X(e^{j\omega})e^{-2j\omega} + \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega}$$

e quindi

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$



## Esercizio 6

Calcolare la *risposta permanente* del circuito avente risposta in frequenza  $H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-2j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-4j\omega}}$  in presenza dell'ingresso  $x[n] = \text{sen}(\frac{\pi}{4}n)$ .

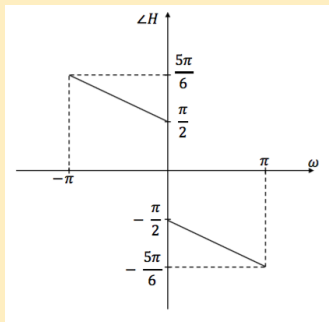
La *risposta permanente*  $y[n]$  si calcola utilizzando la risposta in frequenza alla pulsazione  $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$  dell'ingresso

$$\begin{aligned}y[n] &= |H(e^{j\frac{\pi}{4}})| \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n + \angle H(e^{j\frac{\pi}{4}})\right) = \\&= \left| \frac{1 - e^{-2j\frac{\pi}{4}}}{1 + \frac{1}{2}e^{-4j\frac{\pi}{4}}} \right| \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n + \angle \frac{1 - e^{-2j\frac{\pi}{4}}}{1 + \frac{1}{2}e^{-4j\frac{\pi}{4}}}\right) = \\&= 2|1 + j| \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n + \angle(1 + j)\right) = \\&= 2\sqrt{2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$



## Esercizio 7

Si consideri un circuito con risposta in ampiezza  $|H(e^{j\omega})| = 1$  (*passatutto*) e risposta in fase  $\angle H(e^{j\omega})$  come nella figura



Si calcoli l'uscita permanente corrispondente all'ingresso  $x[n] = \cos(\frac{3}{2}\pi n + \frac{\pi}{4})$ .

# La risposta permanente

Si ha

$$y[n] = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n + \frac{\pi}{4} + \angle H(e^{j\frac{3}{2}\pi})\right)$$

Poichè per la periodicità della risposta in frequenza

$$H(e^{j\frac{3}{2}\pi}) = H(e^{j(\frac{3}{2}\pi - 2\pi)}) = H(e^{-j\frac{1}{2}\pi}) = e^{j\frac{2}{3}\pi}$$

si ha

$$y[n] = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n + \frac{1}{4}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi n + \frac{11}{12}\pi\right)$$



## Esercizio 8

Si consideri un circuito con risposta impulsiva  $h[n] = (\frac{j}{2})^n \cdot u[n]$ , sottoposto all'ingresso  $x[n] = \cos \pi n \cdot u[n]$ . Si calcoli la risposta permanente del circuito.

La *DTFT* di  $h[n]$  è  $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{j}{2}e^{-j\omega}}$ . La risposta in frequenza alla pulsazione dell'ingresso  $\omega = \pi$  è

$$H(e^{j\pi}) = \frac{1}{1 - \frac{j}{2}e^{-j\pi}}$$

Quindi

$$|H(e^{j\pi})| = \left| \frac{1}{1 - \frac{j}{2}e^{-j\pi}} \right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \quad \angle H(e^{j\pi}) = \angle \frac{1}{1 - \frac{j}{2}e^{-j\pi}} = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

# La risposta permanente

La risposta permanente è dunque

$$\begin{aligned}y[n] &= |H(e^{j\pi})| \cos\left(\pi n + \angle H(e^{j\pi})\right) \cdot u[n] = \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cos\left(\pi n - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot u[n]\end{aligned}$$

