Circuiti per la multimedialità

Esercitazione n. 3
Campionamento e ricostruzione

Raffaele Parisi

Dipartimento DIET, Università di Roma "La Sapienza"

Esercizio 1

Il segnale analogico

$$x(t) = \cos(2\pi 600 t) + \text{sen}(2\pi 1100 t) + \cos(2\pi 2000 t - \frac{\pi}{4})$$

viene campionato alla frequenza f_c. Si calcoli la *DTFT* del segnale campionato $x[n]$ e si discuta la ricostruibilità del segnale analogico dai suoi campioni.

1. $f_c = 8\ kHz$
2. $f_c = 3\ kHz$

Il campionamento di $x(t)$ alla frequenza f_c generica fornisce la sequenza

$$x[n] = \cos(2\pi 600 \frac{n}{f_c}) + \text{sen}(2\pi 1100 \frac{n}{f_c}) + \cos(2\pi 2000 \frac{n}{f_c} - \frac{\pi}{4})$$

Quindi:

1. $f_c = 8\ kHz$

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi\frac{600}{8000}n) + \text{sen}(2\pi\frac{1100}{8000}n) + \cos(2\pi\frac{2000}{8000}n - \frac{\pi}{4}) = \\ &= \cos(\frac{3}{20}\pi n) + \text{sen}(\frac{11}{40}\pi n) + \cos(\frac{1}{2}\pi n - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

In questo caso la frequenza di ciascuna componente del segnale analogico è inferiore alla metà della frequenza di campionamento e quindi è possibile ricostruire esattamente il segnale analogico (cioè senza *aliasing*).

Per calcolare la *DTFT* di $x[n]$, si ricorda che la *DTFT* della funzione esponenziale $e^{j\omega_0 n}$ è la sequenza

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0 + 2\pi k\right)$$

Quindi si ha:

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\omega - \frac{3}{20}\pi + 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{3}{20}\pi + 2\pi k\right)\right) +$$

$$-\pi j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\omega - \frac{11}{40}\pi + 2\pi k\right) - \delta\left(\omega + \frac{11}{40}\pi + 2\pi k\right)\right) +$$

$$+\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\pi + 2\pi k\right) + e^{j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\omega + \frac{1}{2}\pi + 2\pi k\right)\right)$$

2. $f_c = 3\ kHz$

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi\frac{600}{3000}n) + \text{sen}(2\pi\frac{1100}{3000}n) + \cos(2\pi\frac{2000}{3000}n - \frac{\pi}{4}) = \\ &= \cos(\frac{2}{5}\pi n) + \text{sen}(\frac{22}{30}\pi n) + \cos(\frac{4}{3}\pi n - \frac{\pi}{4}) = \\ &= \cos(\frac{2}{5}\pi n) + \text{sen}(\frac{22}{30}\pi n) + \cos\left[(2\pi - \frac{2}{3}\pi)n - \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \cos(\frac{2}{5}\pi n) + \text{sen}(\frac{22}{30}\pi n) + \cos(\frac{2}{3}\pi n + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Stavolta la frequenza del terzo segnale ($2kHz$) è superiore alla metà della frequenza di campionamento. In questo caso quindi non è possibile ricostruire il segnale analogico senza *aliasing*. Infatti il segnale analogico ricostruito sarebbe

$$x(t) = \cos(2\pi 600t) + \text{sen}(2\pi 1100t) + \cos(2\pi 1000t + \frac{\pi}{4})$$

La *DTFT* naturalmente risulta

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\omega - \frac{2}{5}\pi + 2\pi k\right) + \delta\left(\omega + \frac{2}{5}\pi + 2\pi k\right)\right) +$$

$$-\pi j \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\delta\left(\omega - \frac{22}{30}\pi + 2\pi k\right) - \delta\left(\omega + \frac{22}{30}\pi + 2\pi k\right)\right) +$$

$$+\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\omega - \frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right) + e^{j\frac{\pi}{4}}\delta\left(\omega + \frac{2}{3}\pi + 2\pi k\right)\right)$$

■

Esercizio 2

Il segnale analogico $x(t) = \text{sen}(20\pi t) + \cos(40\pi t)$ viene campionato con periodo T e produce la sequenza $x[n] = \text{sen}(\frac{1}{5}\pi n) + \cos(\frac{2}{5}\pi n)$. Indicare i possibili valori di T.

Il campionamento di $x(t)$ fornisce la sequenza

$$x[n] = \text{sen}(20\pi nT) + \cos(40\pi nT)$$

Utilizzando per il primo segnale un periodo T', si otterrebbe

$$20\pi nT' = \frac{1}{5}\pi n + 2k'\pi n$$

con $k' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, da cui si ricava $T' = \frac{1}{100} + \frac{1}{10}k'$.
Per il secondo segnale, il ricorso ad un periodo T'' porterebbe all'equazione

$$40\pi nT'' = \frac{2}{5}\pi n + 2k''\pi n$$

da cui si ricava $T'' = \frac{1}{100} + \frac{1}{20}k''$, con $k'' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

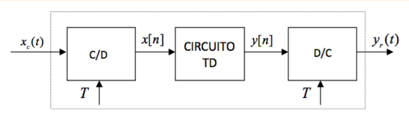
La necessità di avere un periodo di campionamento T comune ai due segnali porta a scegliere la prima soluzione

$$T = T' = \frac{1}{100} + \frac{1}{10}k'$$

Una possibile scelta sarebbe ad esempio $T_1 = \frac{1}{100}$ s e $T_2 = \frac{11}{100}$ s.
■

Esercizio 3

Nello schema riportato in figura



il circuito *TD* è un filtro passabasso ideale con *pulsazione* di taglio $\omega_0 = \frac{\pi}{8} rad/s$. Si chiedono:

1. il massimo valore del periodo T necessario per campionare senza *aliasing* il segnale $x_c(t)$ nell'ipotesi che questo sia limitato in banda a $5kHz$.
2. La *frequenza* di taglio F_0 del filtro analogico *complessivo* risultante nell'ipotesi che sia
   a) $1/T = 10kHz$
   b) $1/T = 20kHz$

Campionamento di segnali

1. La frequenza di campionamento deve essere almeno il doppio della massima frequenza del segnale. Quindi $f_c = 10kHz$ e $T = 1/f_c = 0,1ms$.
2. Poiché la pulsazione a tempo discreto ω e la pulsazione a tempo continuo Ω sono legate dalla relazione $\omega = \Omega T$, si ha
   a) $\Omega_0 = \omega_0 \cdot 10000 \rightarrow F_0 = \Omega_0/2\pi = 625Hz$
   b) $\Omega_0 = \omega_0 \cdot 20000 \rightarrow F_0 = \Omega_0/2\pi = 1250Hz$

■

Esercizio 4

La sequenza $x[n] = \cos(\frac{\pi}{3}n)$ è stata ottenuta dal campionamento di un segnale analogico $x(t) = \cos \Omega t$ mediante la frequenza di campionamento $f_c = 1200$ *campioni*/*s*. Determinare i possibili valori di Ω che generano la stessa sequenza $x[n]$.

Il campionamento di $x(t) = \cos \Omega t$ alla frequenza $f_c = 1200$ *campioni*/*s* produce la sequenza

$$x[n] = \cos \Omega \frac{n}{f_c}$$

in cui $\frac{\Omega}{f_c}$ deve essere uguale a $\frac{\pi}{3}$ più un multiplo intero di 2π

$$\frac{\Omega}{f_c} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

I possibili valori di Ω sono allora

$$\Omega = (\frac{\pi}{3} + 2k\pi)f_c = 400\pi + 2400k\pi$$

Ad esempio i tre segnali

$$\begin{cases} x_1(t) = \cos 400\pi t & (k = 0) \\ x_2(t) = \cos 2800\pi t & (k = 1) \\ x_3(t) = \cos(400\pi - 2400\pi)t = \cos 2000\pi t & (k = -1) \end{cases}$$

campionati alla frequenza di $f_c = 1200$ *campioni/s*, producono la stessa sequenza (*aliasing*). Si noti che il terzo caso ($k = -1$) viene spesso indicato come *folding*.
■

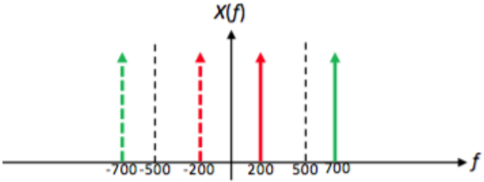
Esercizio 5

Si consideri il segnale analogico

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3\cos(2\pi 200 t) + 5\cos(2\pi 700 t)$$

Questo segnale viene campionato alla frequenza $f_c = 500\ Hz$. Determinare il segnale analogico ricostruito dai campioni tramite un filtro passabasso ideale con frequenza di taglio uguale alla frequenza di Nyquist $f_c/2 = 250\ Hz$ e guadagno $T = 1/f_c$.

La trasformata di Fourier (analogica) del segnale $x(t)$ è mostrata nella figura



in cui gli impulsi a $\pm 200 Hz$ hanno area pari a $3/2$, mentre gli altri hanno area $5/2$.
Il campionamento di $x(t)$ con la frequenza $f_c = 500\ Hz$ produce due sequenze di impulsi *a tempo continuo* $x_{c1}(t)$ e $x_{c2}(t)$ che hanno rispettivamente le trasformate di Fourier (analogiche)

$$X_{c1}(f) = \frac{3}{2T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(f - 200 + kf_c) + \delta(f + 200 + kf_c)]$$

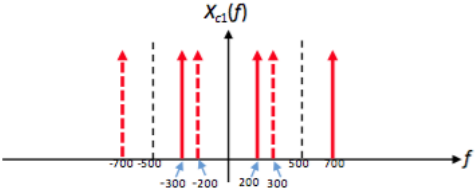
e

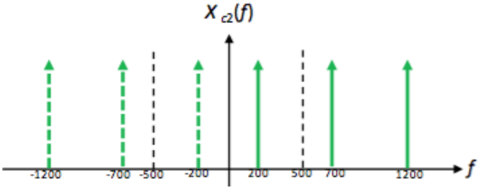
$$X_{c2}(f) = \frac{5}{2T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(f - 700 + kf_c) + \delta(f + 700 + kf_c)]$$

Le trasformate $X_{c1}(f)$ e $X_{c2}(f)$ sono costituite da coppie di impulsi periodiche centrate intorno a multipli interi della frequenza di campionamento $f_c = 500\ Hz$.

Ricostruzione di segnali

Le figure seguenti mostrano i primi multipli presenti in $X_{c1}(f)$ e $X_{c2}(f)$ $(k = 0, \pm 1)$.





La ricostruzione con un filtro passabasso ideale di banda $(-f_c/2, f_c/2)$ e guadagno $T = 1/f_c$ produce il segnale

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{r1}(t) + x_{r2}(t) = 3\cos(2\pi 200t) + 5\cos(2\pi 200t) = \\ &= 8\cos(2\pi 200t) \end{aligned}$$

in cui $x_{r1}(t) = x_1(t)$, mentre il secondo segnale è affetto da *aliasing*.

■

Esercizio 6

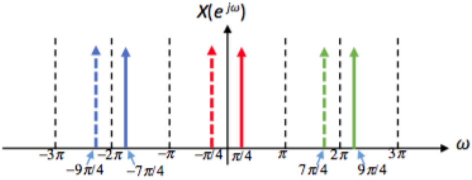
Si considerino le sequenze

1. $x[n] = \cos \frac{\pi}{4} n$
2. $x[n] = \cos \frac{3\pi}{4} n$
3. $x[n] = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} n}{\frac{\pi}{3} n}$

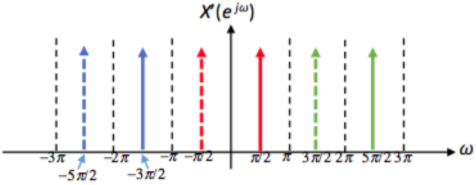
Dire quali di questi segnali può essere sottocampionato di un fattore 2 senza che perda la sua forma originale.

Poiché il sottocampionamento comporta un allargamento della *DTFT* del segnale, in questo caso di un fattore 2, bisogna verificare se la *DTFT* del segnale originale è contenuta nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. In caso contrario, con il sottocampionamento si verificherebbe una sovrapposizione delle repliche della *DTFT* centrate su multipli della frequenza 2π.

1. La sequenza $x[n] = \cos\frac{\pi}{4}n$ ha la *DTFT* riportata nella figura

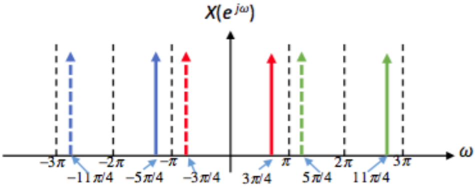


in cui ogni impulso ha *area* $1/2$. Sono stati usati colori diversi per rappresentare le repliche periodiche della *DTFT*. La sequenza $x'[n]$ ottenuta dal sottocampionamento di $x[n]$ di un fattore 2 ha *DTFT*

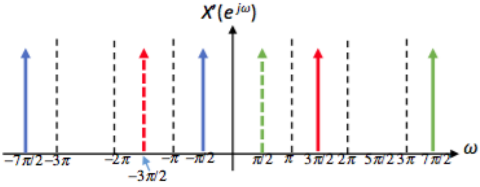


In questo caso il sottocampionamento non modifica il segnale.

2. La sequenza $x[n] = \cos\frac{3\pi}{4}n$ ha invece questa *DTFT*

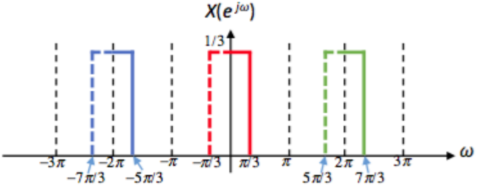


In questo caso la sequenza $x'[n]$ ha la *DTFT* riportata in figura

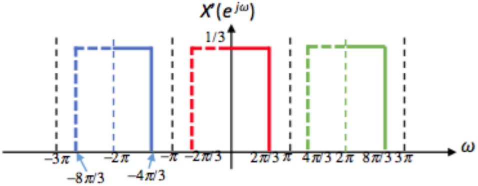


e porterebbe ad una grandezza analogica diversa dall'originale.

3. La terza sequenza è (a meno di un fattore 1/3) la risposta impulsiva di un filtro passabasso ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{\pi}{3}$. La *DTFT* è riportata in figura



Il sottocampionamento conduce alla *DTFT* riportata in figura



senza che ci sia quindi sovrapposizione delle repliche vicine. ■