



Università di Roma "La Sapienza"
Laurea specialistica in Ingegneria Elettronica

Circuiti a tempo discreto

Raffaele Parisi

Capitolo 1: Elementi Introduttivi

Obiettivi del corso, versatilità modello circuitale, modello non direzionale e unidirezionale, circuito URC, segnali e sequenze, circuiti TC e TD, cenni storici.

Obiettivi del corso:

- ✓ Derivazione del *modello circuitale a tempo discreto* (circuito digitale): elementi costitutivi, metodi di analisi, proprietà, elaborazione di sequenze numeriche.
- ✓ Relazione *ingresso-uscita* nei domini delle variabili n , z e ω : equazione alle differenze, trasformate, funzione di rete e risposta in frequenza.
- ✓ Filtri *FIR* e *IIR*: caratteristiche generali, studio dei filtri elementari, cenni alla sintesi.

Versatilità del modello circuitale

- *Circuito*: connessione di *blocchi funzionali* appartenenti a pochi tipi fondamentali e caratterizzati da *equazioni costitutive* dipendenti da un numero finito di parametri (misurabili).
- Non coincide con un sistema fisico ma è una sua rappresentazione in forma di *modello* astratto. La *rete di interconnessione* tra i blocchi è infatti descritta in modo formale da un apposito *grafo*.
- La *versatilità* del modello circuitale è dovuta al fatto che i principi topologico-algebrici alla sua base sono del tutto simili ai principi alla base del calcolo vettoriale. Può perciò rappresentare molte varietà di strutture fisiche (e non-fisiche).

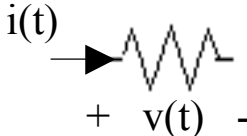
	Struttura ELETTRICA	Struttura MAGNETICA	Struttura MECCANICA(*)
Grandezza fisica agli estremi e attraverso	V [Volt] I [Ampere]	U [Ampere] Φ [Weber]	v [metri/sec.] F [Newton]
Parametri circuitali	C [Farad] L [Henry] R [Ohm]	- L [Ohm ⁻¹] (ind. magn.) R [Henry ⁻¹] (riluttanza)	m [Kg] (massa) L [m/N] (elasticità) R [N·s/m] (res. meccanica)
Bipoli particolari	corto circuito circuito aperto	- -	punto bloccato punto libero

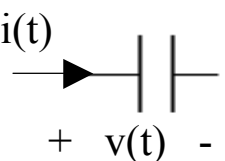
(*) Analogia della MOBILITA'

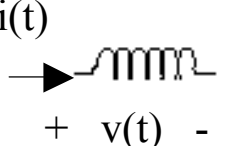
Modello circuitale non direzionale

- Non è stabilita a priori *alcuna relazione causa/effetto* tra le variabili in gioco (si definisce dall'esterno). La direzione degli scambi energetici tra i blocchi è perciò non determinata a priori.
- Deriva dal modellamento di *fenomeni ondulatori* e risente della natura distribuita delle leggi fisiche considerate (equazioni di Maxwell nel caso elettrico e magnetico).
- Il *sistema risolvente* calcola in modo *congiunto* le variabili presenti che dipendono da tutti i blocchi interconnessi (soluzione onerosa dal punto di vista numerico).

- Il *circuito elettrico* nel dominio *tempo-continuo* (analogico) è un modello non direzionale.
- Infatti, nelle *relazioni costitutive* degli elementi non sono stabilite a priori relazioni di causa/effetto tra le grandezze fisiche presenti:

Resistore:  $v(t) = Ri(t); \quad i(t) = Gv(t);$

Condensatore:  $i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}; \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau;$

Induttore:  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}; \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$

Modello circuitale direzionale (o unidirezionale)

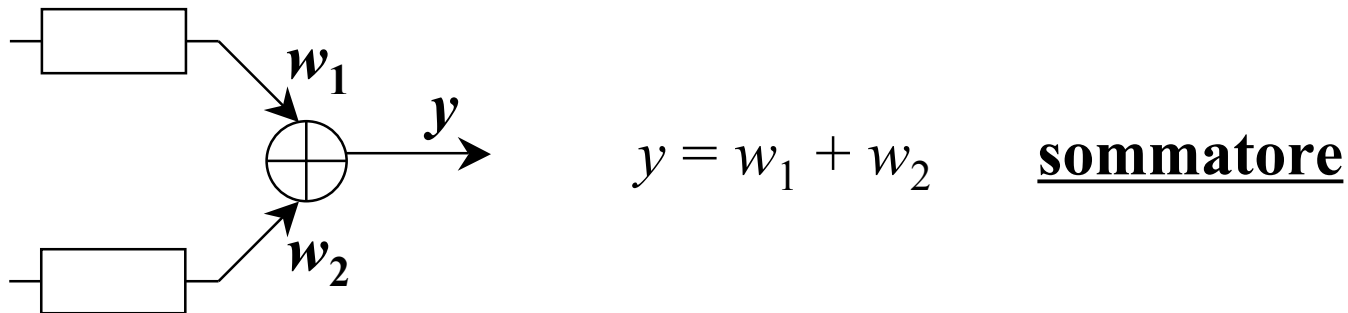
- E' stabilita a priori una *relazione causa/effetto* tra le variabili presenti nelle equazioni costitutive dei blocchi.



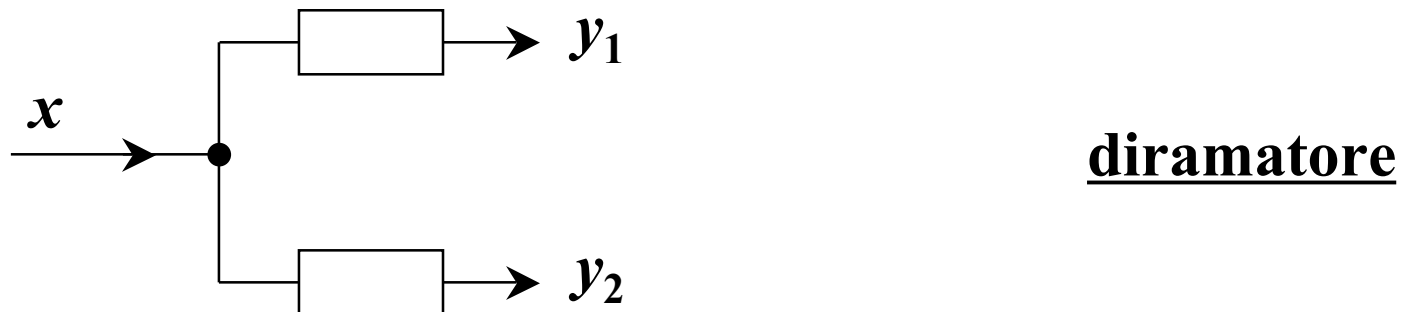
- Si pone ad un *livello di astrazione superiore* a quello del modello non direzionale. Può quindi rappresentare anche *strutture non-fisiche*, quali quelle per l'elaborazione dei segnali.
- Il *sistema risolvente* calcola in modo *disaccoppiato* le variabili presenti: si possono quindi utilizzare soluzioni di tipo *sequenziale*. Ciò è molto importante perché implica un *legame* diretto tra *modelli unidirezionali* ed *algoritmi*.

Conseguenze della direzionalità sulla *rete di connessione* (grafo):

1) la connessione tra più morsetti d'uscita richiede la definizione di un nuovo componente:

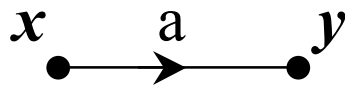


2) è consentita la diramazione della stessa causa su più morsetti d'ingresso:



Conseguenze della direzionalità sulle *relazioni costitutive*:

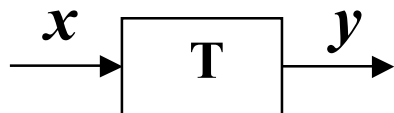
a) SENZA MEMORIA



$$y = a x$$

moltiplicatore per costante

b) CON MEMORIA



$$y = x(t-T)$$

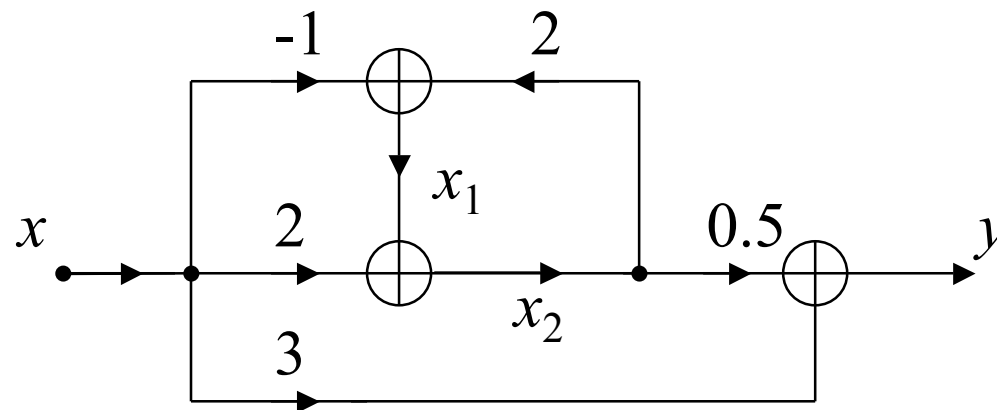
ritardo

✓ Si considera lo stesso ritardo T per tutti gli elementi con memoria: *modello URC* (unidirezionale a ritardo costante).

Analisi del circuito URC senza memoria:

- 1) si considerano come *nodi* le uscite dei sommatori, da cui si prelevano le incognite;
- 2) si scrivono le relazioni costitutive dei sommatatori esplicitando le incognite, ottenendo così un sistema algebrico lineare;
- 3) si risolve il sistema in modo sequenziale (variabili disaccoppiate).

Esempio



$$x_1 = -x + 2x_2$$

$$x_2 = 2x + x_1 = 2x - x + 2x_2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -x$$

$$y = 3x + 0.5x_2 = 2.5x$$

Analisi del circuito URC con memoria:

1) occorre riportarsi al caso senza memoria tramite *trasformazione* (Laplace):

$$y(t) = x(t-T) \longrightarrow L[y(t)] = e^{-sT} L[x(t)] \longrightarrow Y(s) = e^{-sT} X(s)$$

$$\text{ponendo } z = e^{sT} \longrightarrow Y(s) = z^{-1} X(s)$$

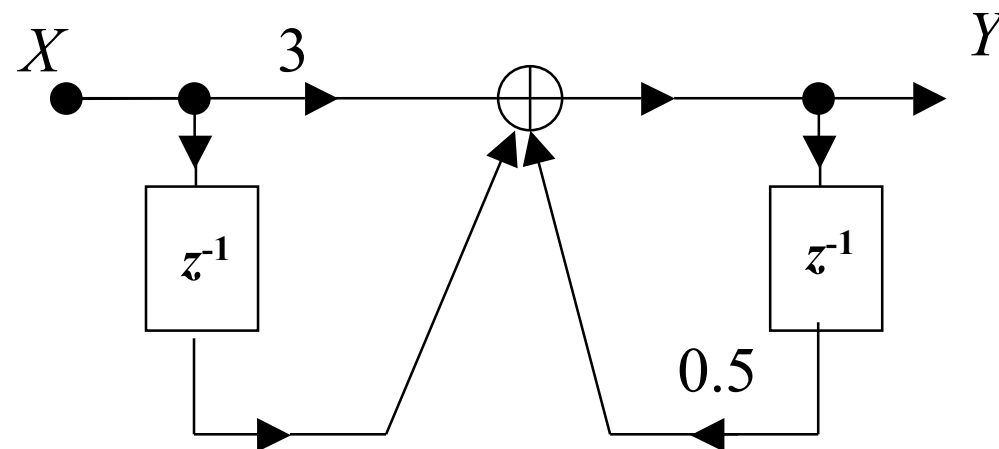
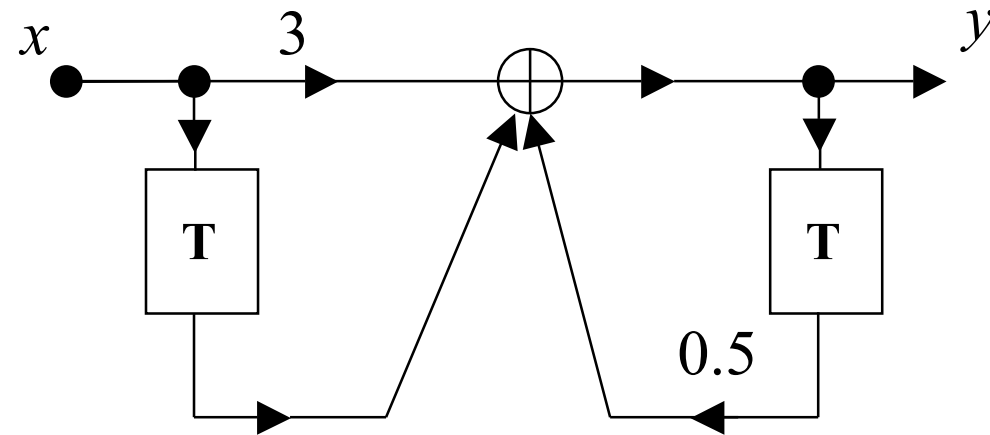
$$X(s) \longrightarrow \boxed{z^{-1}} \longrightarrow Y(s)$$

l'elemento con memoria (ritardo) diventa un elemento senza memoria (moltiplicatore) con coefficiente moltiplicativo in funzione di s ;

2) si analizza il circuito senza memoria;

3) si antitrasforma.

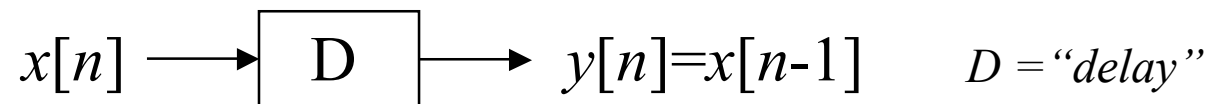
Esempio



$$Y(s) = 3X(s) + z^{-1}X(s) + 0.5z^{-1}Y(s) \quad \longrightarrow \quad Y(s)/X(s) = (3 + z^{-1}) / (1 - 0.5z^{-1})$$

Osservazioni (1)

- Il modello URC è normalmente utilizzato nel dominio *tempo-discreto* (TD) per elaborare *sequenze numeriche* $\{x[n]\}$.
- Le sequenze si possono definire in modo astratto o ottenere per *campionamento* di *segnali* tempo-continui (TC). In questo caso, il ritardo T corrisponde al periodo di campionamento (ritardo unitario).



- Da qui in poi considereremo il modello URC nel dominio TD (dove gli elementi costitutivi introdotti realizzano operazioni elementari su sequenze numeriche) e parleremo di **circuito TD**.

Osservazioni (2)

- Nei circuiti TC (analogici) sono definiti *2 elementi con memoria* (o reattivi). Ciò è dovuto al fatto che esistono *2 grandezze elettriche*: la corrente e la tensione.
- Nel caso dei circuiti TD la natura del segnale è unica (una sola grandezza) e simbolica (una sequenza di numeri). Come conseguenza si ha un solo elemento reattivo: il *ritardo unitario*. Tale proprietà consente lo studio di circuiti TD attraverso schemi direzionali unifilari.
- Un circuito TD si dice *valido* quando tutti i percorsi chiusi presenti contengono almeno un ritardo (c.n.s.). In tal caso il suo grafo si dice *calcolabile*.

Osservazioni (3)

- Il sistema risolvibile di un circuito TD è riconducibile ad un algoritmo (in particolare, se il circuito è valido, ad un sistema di *equazioni numeriche ricorsive*) e dualmente un algoritmo è riconducibile ad un circuito TD:

CIRCUITI \Leftrightarrow ALGORITMI

- Tale *dualità* vale anche in riferimento alle proprietà topologiche fondamentali (ad esempio esiste un *Teorema di Tellegen* per i circuiti TD).

L'oggetto dell'elaborazione: il segnale

- ✓ Si intende per *segnale* una qualsiasi *espressione fisica* (acustica, elettrica, ottica, ecc.) in cui sono contenuti *segni* riconoscibili.
- ✓ L'andamento della grandezza fisica con cui il segnale si realizza costituisce la sua *forma* (impulsiva, periodica, oscillatoria, a salti, ecc.).
- ✓ La forma contiene i segni da riconoscere (ad es. nel segnale musicale i segni sono le note, che corrispondono a diversi tipi di oscillazione).
- ✓ Si può quindi parlare di articolazione del segnale in tre livelli: *fisico* (natura), *morfologico* (forma), *interpretativo* (segni).

✓ Nel seguito si farà solitamente riferimento al solo livello morfologico. In tal caso, si considera la descrizione formale del segnale in termini di variazioni nel tempo della grandezza fisica considerata (forma d'onda):

segnale ↔ funzione del tempo

In generale il segnale può essere funzione di più variabili, anche diverse dal tempo (ad es. un'immagine è una grandezza ottica funzione delle variabili spaziali x ed y).

Esempi di segnale

- Voce = funzione continua e limitata nel tempo.
- Immagine = funzione continua e limitata nello spazio (2 variabili spaziali x e y).
- Video = funzione continua e limitata nello spazio e nel tempo (3 variabili x , y , t).

Classificazione dei segnali

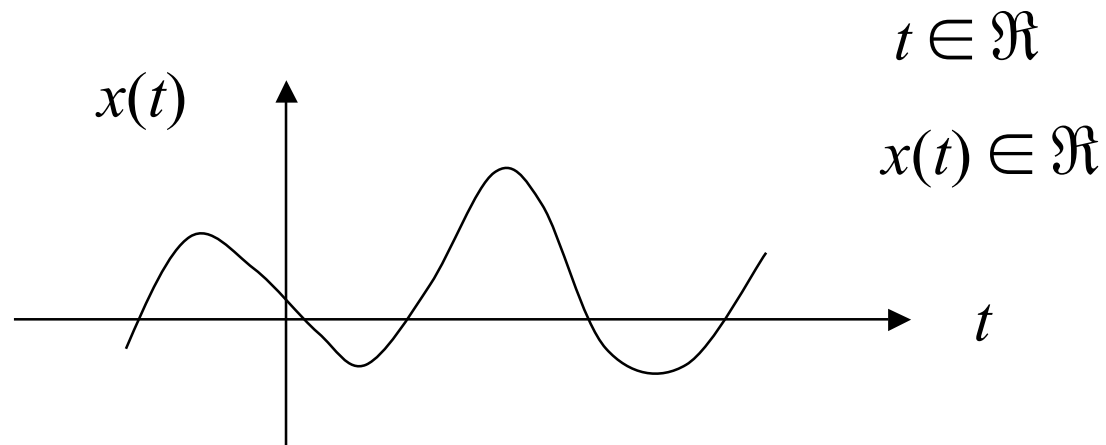
- ✓ Segnali *analogici* o *a tempo-continuo* (TC): funzioni continue.
- ✓ Segnali *a tempo-discreto* (TD): funzioni discrete (*sequenze*).
- ✓ Segnali *digitali*: funzioni discrete a precisione limitata.

Segnali analogici o a tempo continuo (TC)

Sono in stretta *analogia* con il mondo fisico.

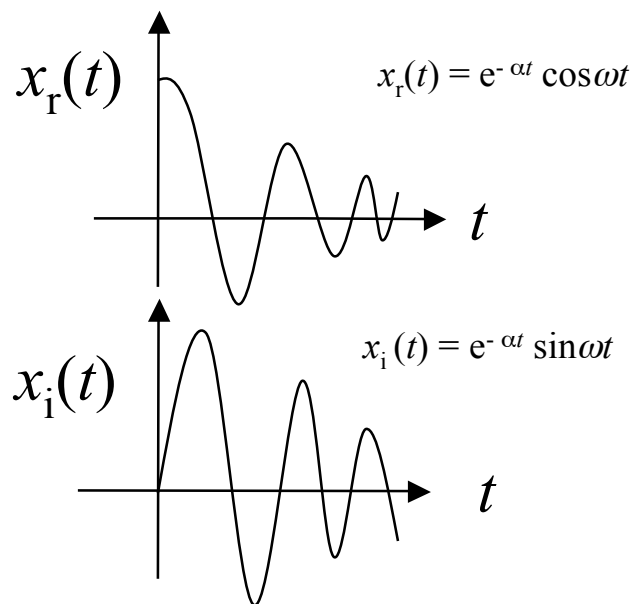
Esempio: tensione e corrente in un circuito elettrico.

I segnali analogici sono rappresentati da funzioni reali della variabile t , continue ovunque.

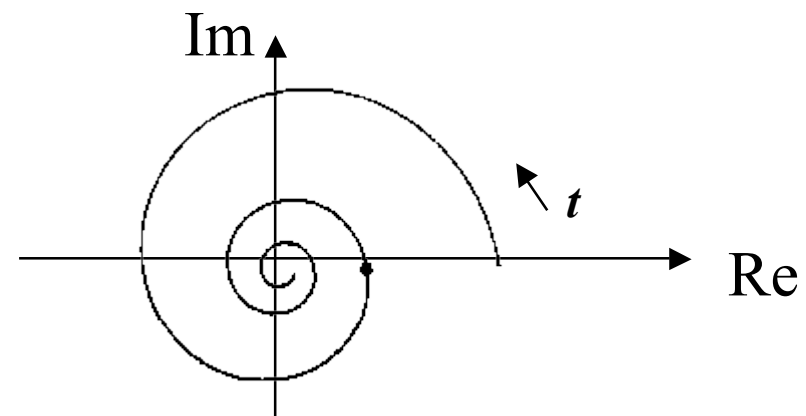


- I segnali analogici possono anche essere *complessi* (es. modulazioni: QAM, PSK,...).
- A volte si ha anche il vincolo della limitatezza (es. impulsi).

Segnale Complesso:



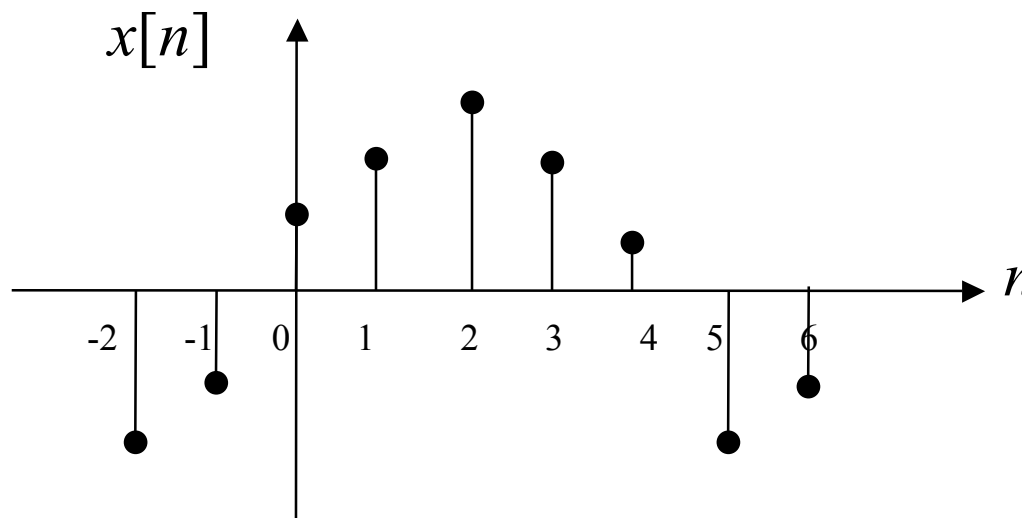
$$x(t) = e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} = x_r(t) + jx_i(t)$$



Sequenze numeriche o segnali *a tempo discreto* (TD)

- Sono definite in un *insieme discreto* di istanti di tempo (non necessariamente equidistanti).

n : discreto, $x[n]$: reale



$$x[-2] = -2$$

$$x[-1] = -1,2$$

$$x[0] = 1$$

$$x[1] = 1,8$$

$$x[2] = 2,2$$

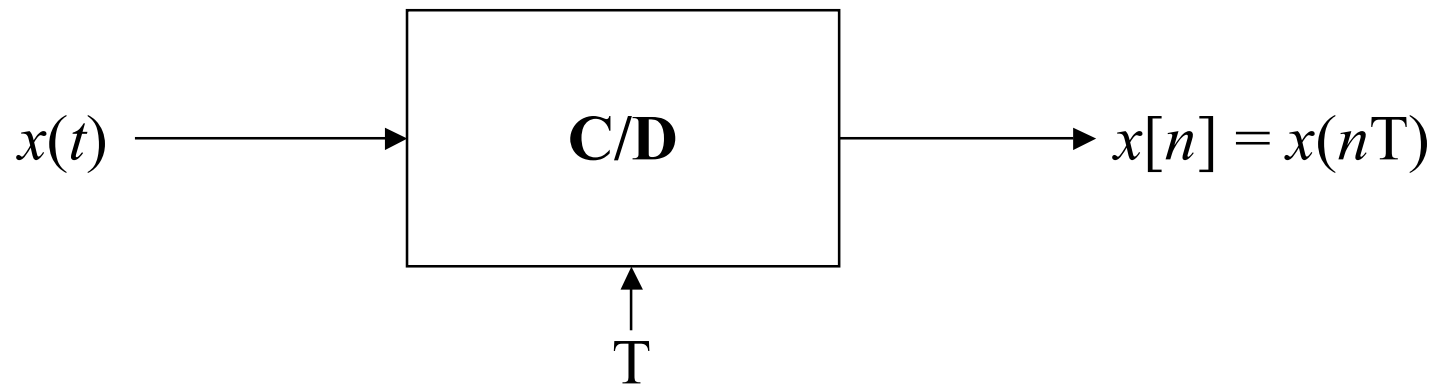
$$x[3] = 1,7$$

$$x[4] = 0,6$$

$$x[5] = -2$$

$$x[6] = -1,2$$

- I segnali TD sono rappresentati da una *sequenza di numeri* e possono essere generati con un algoritmo.
- Spesso i segnali TD sono ottenuti campionando i corrispondenti segnali TC con un convertitore *continuo-discreto* ⁽¹⁾ (C/D).

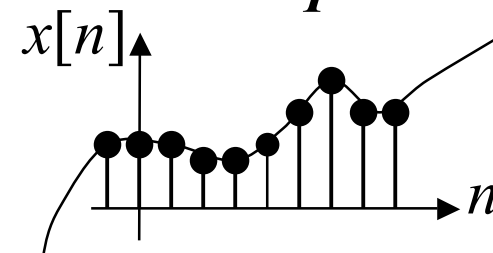
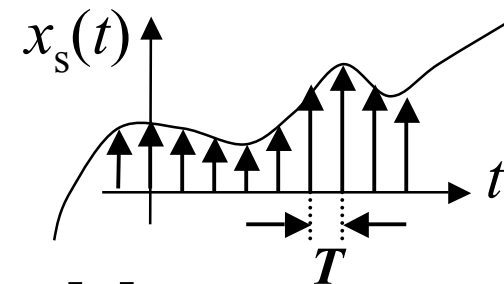
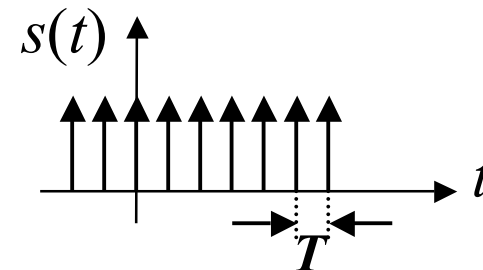
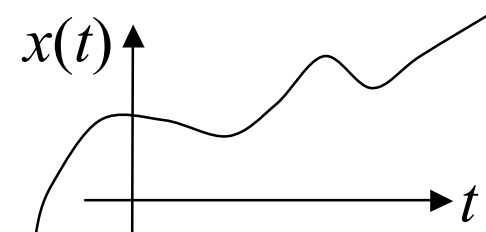
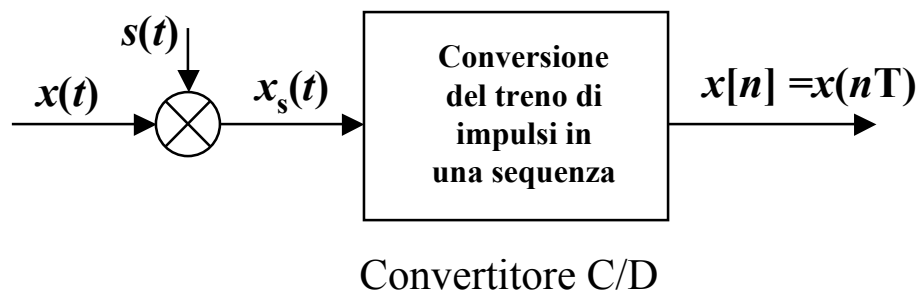


⁽¹⁾ Dal punto di vista circuitale un convertitore continuo-discreto (C/D) può essere considerato come un convertitore analogico-digitale (A/D) ideale.

- Generazione di una sequenza numerica a partire da una grandezza analogica

T : periodo di campionamento

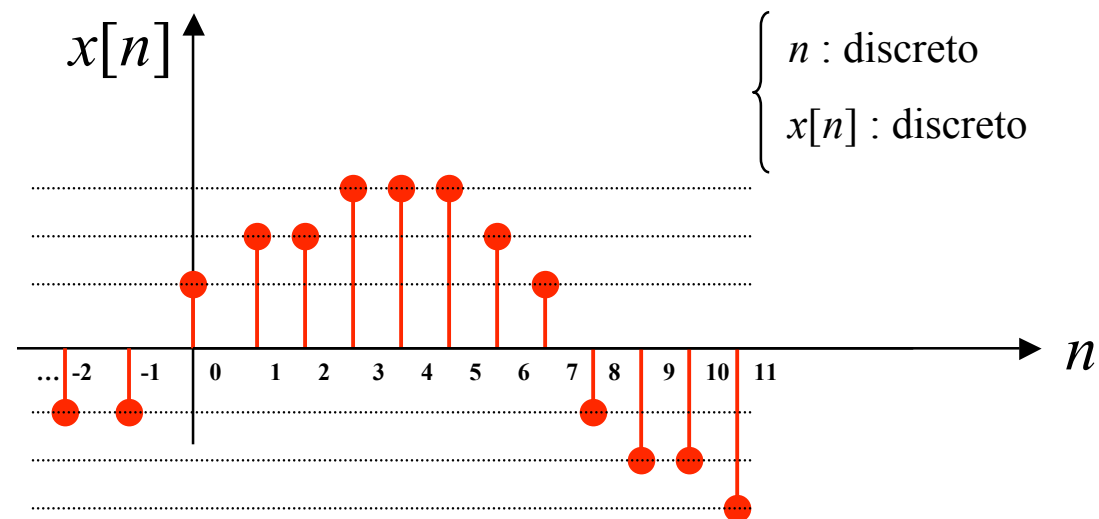
$s(t)$: “treno” di impulsi



Segnali digitali (*quantizzati*)

- Sono definiti come segnali a *valori discreti* di variabili discrete (cioè sono discreti anche nel codominio).

Esempio

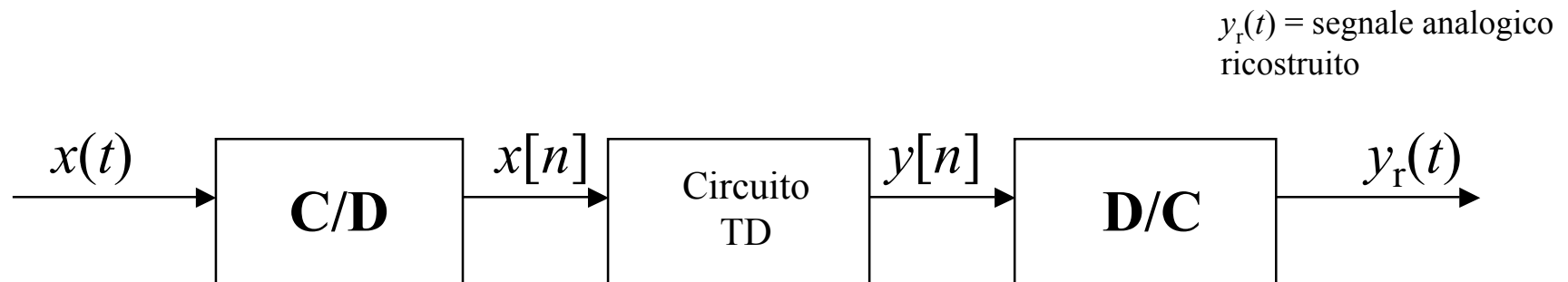


Discretizzazione

- Precisione finita: intera (complemento a 2);

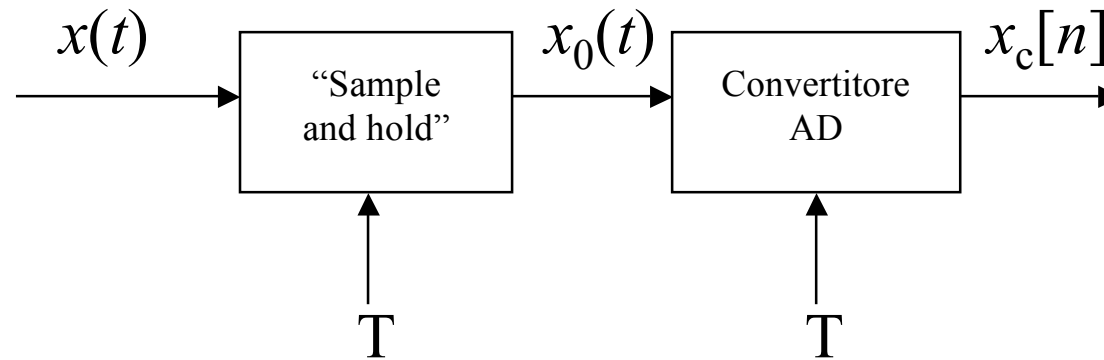
reale (fixed-point, floating-point).

- Processo di conversione C/D (Continuo-Discreto) reale: conversione analogico-digitale con un certo numero di bit.

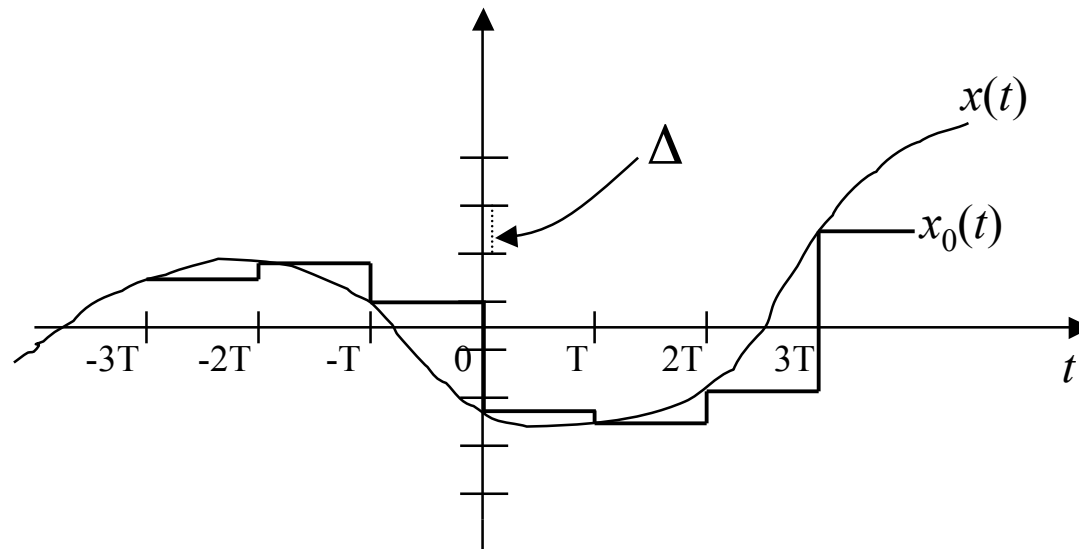


Schema di elaborazione di un segnale analogico tramite un circuito TD

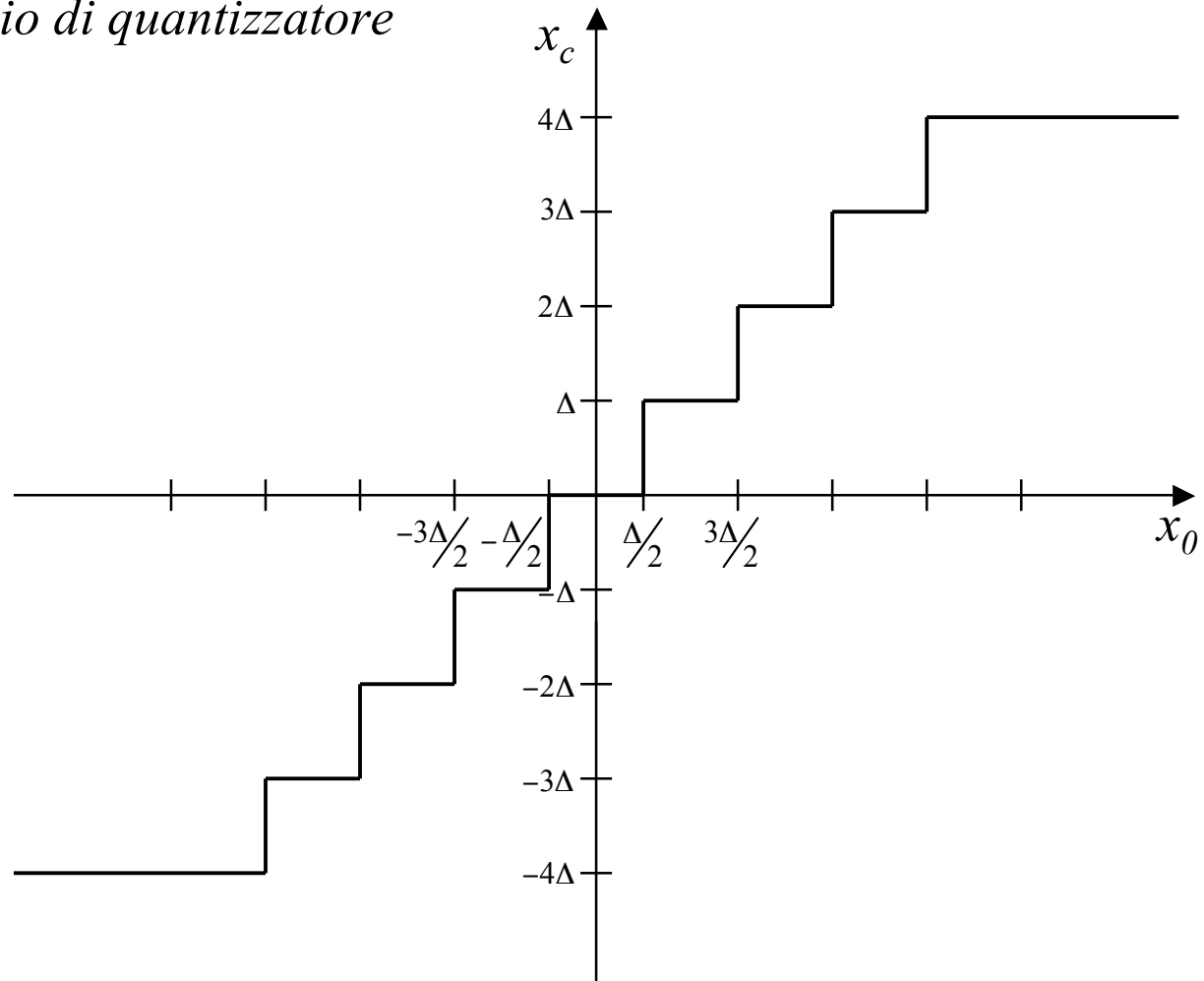
Schema di conversione analogico-digitale



Effetto del "sample-and-hold" (SH)



Esempio di quantizzatore



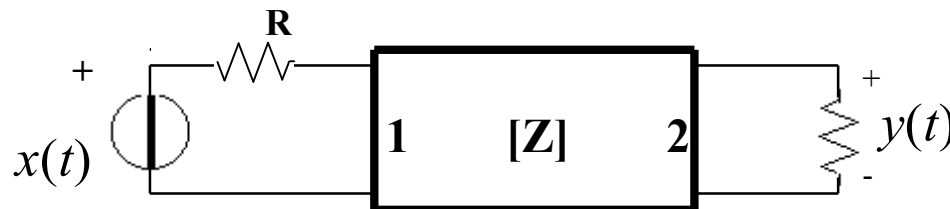
Circuiti per il trattamento dei segnali:

• Circuiti TC



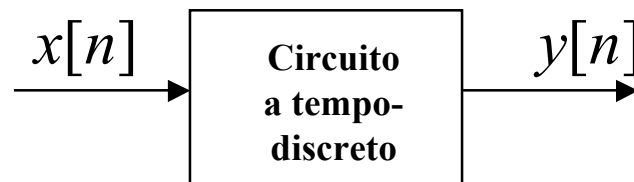
$x(t), y(t)$: grandezze analogiche
(tensione e/o corrente)

Esempio



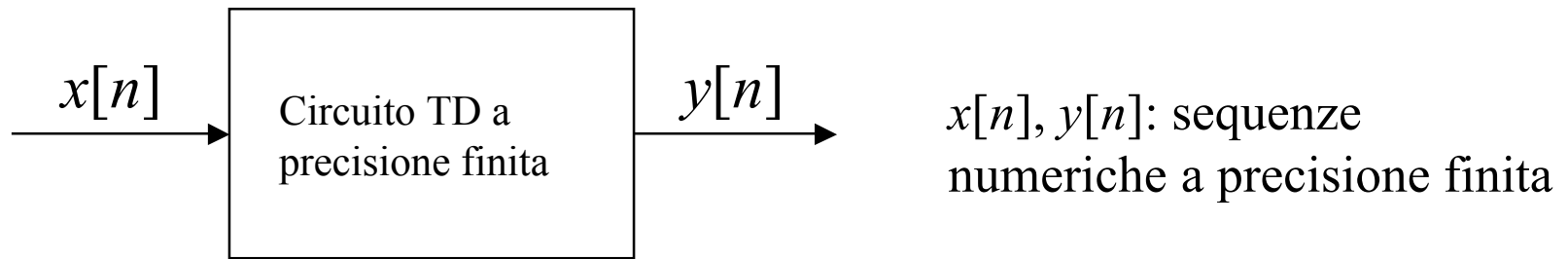
Rete 2-porte

• Circuiti TD

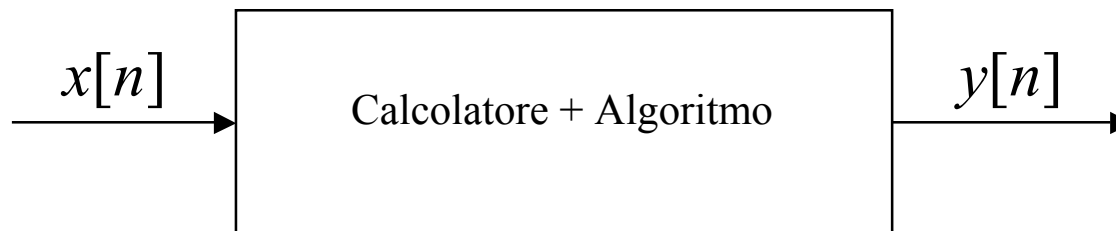


$x[n], y[n]$: sequenze numeriche

- Circuiti digitali



Esempio: calcolatore



✓ Circuiti analogici

Usualmente realizzati con circuiti a costanti concentrate o distribuite

✓ Vantaggi:

- alta velocità;
- basso costo potenziale;
- capacità di gestire grandi potenze.

✓ Svantaggi:

- sensibilità al rumore;
- scarsa riproducibilità;
- scarsa flessibilità.

✓ Circuiti digitali

Buona approssimazione di sistemi discreti, spesso realizzati con circuiti programmabili

✓ Vantaggi:

- **riproducibilità e insensibilità al rumore;**
- **alta flessibilità (capacità di adattamento);**
- **basso costo in rapporto alla complessità;**
- **possibilità di integrazione su larga scala;**
- **possibilità di funzioni non ammissibili in sistemi automatici;**
- **buona interfaccia 'uomo-macchina'.**

✓ Svantaggi:

- **bassa velocità;**
- **scarsa gestione della potenza;**
- **problemi di decisione (rumore)**

Cenni storici

- **anni 1900-1950:**

- sviluppo circuiti analogici (elettrici, meccanici, pneumatici,...).
- sviluppo di tecniche di sintesi dei circuiti elettrici lineari e stazionari (bipoli e reti 2-porte RLCM).

- **anni '50-'60:**

- prime apparizioni dei calcolatori digitali applicati alla simulazione dei circuiti analogici.
- sviluppo teorico dei circuiti discreti a partire da quelli analogici.

- **Anni 1965 – oggi:**

- **Algoritmo Fast Fourier Transform (FFT), che ha reso possibile l'applicazione dei circuiti digitali anche a segnali reali (drastica riduzione dei tempi).**

- **Sviluppo dei circuiti discreti e digitali come disciplina autonoma non necessariamente legata ai circuiti analogici.**

- **Sviluppo di tecniche e strumenti numerici per la interpretazione dei segnali (es. *pattern recognition*).**

- **Circuiti analogici:**

- Applicazioni alta frequenza (VHF, UHF, microonde).
- Applicazioni di potenza (amplificatori, filtri di crossover, ecc.).
- Circuiti di primo condizionamento del segnale (preamplificatori, filtri anti-aliasing, ecc.)

- **Circuiti discreti-digitali:**

- Applicazioni non “real-time”: praticamente in tutti i campi.
- Applicazioni “real-time”: in tutti i campi permessi compatibilmente con la velocità dell’hardware.

- *Esempi applicativi:* segnali TLC (vocali, modulazioni, etc.), immagini, video, segnali biologici, sismici, radar, sonar, astronomia, trattamento dell’informazione (compressione, crittografia, etc.), segnali musicali, multimedia, etc.

- **La ricerca e le applicazioni dei circuiti per il trattamento dei segnali digitali (DSP) sono in forte ascesa ormai da numerosi anni.**